2023年 令和5年度 京都府立高等学校入学考査 前期 数学 解答例

この解答は一個人の思い込みによって作られていますので，完全には信用なさらず参考程度にご利用下さい。

1

(1) $-3^2\times\{7-(-4)^2\}$

$=-9\times\{7-(+16)\}$

$=-9\times(7-16)$

$=-9\times(-9)$

$=\underline{81}$ ……[1]

(2) $\dfrac{3x-2y}{6}-\dfrac{4x-y}{8}$

$=\dfrac{4(3x-2y)}{24}-\dfrac{3(4x-y)}{24}$

$=\dfrac{4(3x-2y)-3(4x-y)}{24}$

注意!!

$=\dfrac{12x-8y-12x+3y}{4}$

$=\dfrac{12x-12x-8y+3y}{24}$

$=\underline{-\dfrac{5}{24}y}\left(=-\dfrac{5y}{24}\right)$ ……[2]

(3) $3\sqrt{50}-\sqrt{2}-\sqrt{54}\div\sqrt{3}$

$=3\times5\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{\dfrac{54}{3}}$

$=15\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{18}$

$=15\sqrt{2}-\sqrt{2}-3\sqrt{2}$

$=(15-1-3)\sqrt{2}$

$=\underline{11\sqrt{2}}$ ……[3]

(4) $\begin{cases}2x-3y=5 & \cdots\cdots ① \\ 3x-(4x-6y)=-1 & \cdots ②\end{cases}$

②について

注意!!

$3x-4x+6y=-1$

$-x+6y=-1$ ……②'

$$\begin{array}{rrl} ①\times2: & 4x-6y & =10 \\ +)\ ②': & -x+6y & =-1 \\ \hline & 3x & =9 \\ & x & =3 \cdots ③ \end{array}$$

③を①に代入して

$2\times3-3y=5$

$6-3y=5$

$-3y=5-6$

$-3y=-1$

$y=\dfrac{1}{3}$

よって，$\underline{x=3,\ y=\dfrac{1}{3}}$ ……[4]

(5)

x	a	$a+2$
y	$-2a^2$	$-2(a+2)^2$

$\Downarrow$

$-2(a^2+4a+4)$

$=-2a^2-8a-8$

よって変化の割合は

$$\frac{(-2a^2-8a-8)-(-2a^2)}{a+2-a}$$

$= \dfrac{-2a^2-8a-8+2a^2}{2}$

$= \dfrac{-8a-8}{2}$ （全部の項を2で割る）

$= -4a-4$

これが−40に等しいから

$-4a-4=-40$

$-4a=-40+4$

$-4a=-36$

$a=9$ ……………[5]

（※）次のようなずるい（賢い？）方法があります。

変化の割合は

$-2\{a+(a+2)\}$

$=-2(2a+2)$

$=-4a-4$

だから，……（以下，上と同じ）

(6) $(2x+y+5)(2x+y-5)$

［$2x+y$がどちらにもあるので］

$2x+y=A$とおくと

$(A+5)(A-5)$

$=A^2-5^2$

$=A^2-25$ ↙元に戻します。

$=(2x+y)^2-25$

$(4x^2+4xy+y^2)-25$

$=4x^2+4xy+y^2-25$ ……[6]

(7) $6x^2+2x-1=0$

解の公式 $\left(x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$ より

$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times6\times(-1)}}{2\times6}$

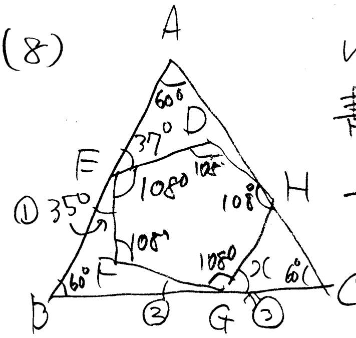
$=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+24}}{12}$

$=\dfrac{-2\pm\sqrt{28}}{12}$

$=\dfrac{-2\pm2\sqrt{7}}{12}$ ↙全部の項を2で割って

$=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{6}$ ……[7]

(8)



わかる角を全部書きこみましょう。

正五角形のひとつの外角の大きさは

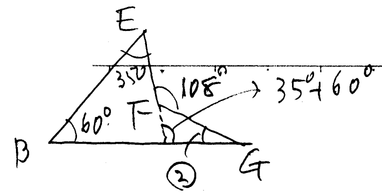
$360°\div5=72°$ だから，ひとつの内角の大きさは $180°-72°=108°$

$\angle BEF=180°-(37°+108°)$

$=180°-145°$

$=35°$ …①

次に②求めます。



$60° + 35° + ② = 108°$ だから

$② = 108° - 60° - 35°$

$= 13°$

よって，

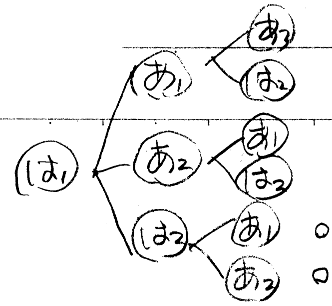
$\angle x = 180° - 13° - 108°$

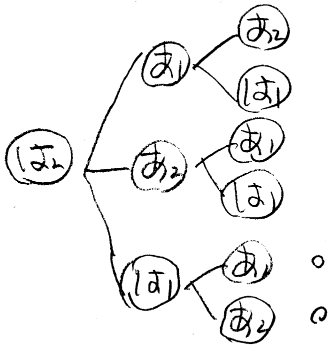
$= \underline{59°}$ ……[8]

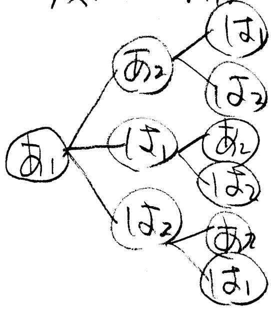
[9] あたりくじを あ1，あ2，

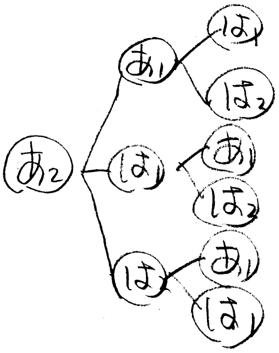
はずれくじを は1，は2 とする。

太郎さん，次郎さん，花子さんの順に樹形図をかくと









条件に合うのは ○ をつけた4通り。

すべての場合の数は

$6 \times 4 = 24$ 通り

で，これらはすべて同様に確からしい。よって，答えは

$\dfrac{4}{24} = \underline{\dfrac{1}{6}}$ ……[9]

[※] 高校ではもっとシンプルに次のように計算できるようになります。

太郎さん，次郎がどちらもはずれを引き，花子さんがあたりをひくことから

$\dfrac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{4}_{2}} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{2}} = \underline{\dfrac{1}{6}}$

2 データを大小順に並べなおします

3, 4, 6, 8, 9, 11, 15 (, a, b)

平均値は

$(\underbrace{3+4+6}_{13}+\underbrace{8+9+11}_{28}+15+a+b)\div 9$

$=(13+28+15+a+b)\div 9$

$=(56+a+b)\div 9$

これが8に等しいので

$\dfrac{56+a+b}{9}=8$

両辺に9をかけて分母をはらうと

$56+a+b=72$

$a+b=72-56$

$a+b=16$ ……①

$0<a<b$ のとき、①をみたす a, b の値の組は

$(a, b)=(1, 15), (2, 14), \cdots, (7, 9)$

このうち、他の7個の値とかぶらないのは（=重複しない）

$(a, b)=(2, 14)$

よって、$a=2$, $b=14$ …… [10]

(2) データを並べなおします。

2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 14, 15 (本)

このままだと、中央値 8、第1四分位数は $\dfrac{3+4}{2}=3.5$、第3四分位数は $\dfrac{11+14}{2}=\dfrac{25}{2}=12.5$。よって、四分位範囲は $12.5-3.5=9$

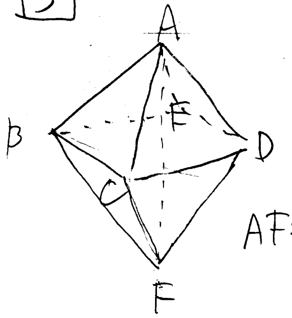
先生の拾ったペットボトルの本数を x（本）、中央値を M、第1四分位数、第3四分位数をそれぞれ a_1, a_2、四分位範囲を X とすると

x	M	a_1	a_2	X
1	7	3	11	8
2	7	3	11	8
3	7	3	11	8
4	7	4	11	7
5	7	4	11	7
6	7	4	11	7
7	7.5	4	11	7
8	8	4	11	7
9	8.5	4	11	7
10		4	11	7
11		4	11	7
12		4	12	8
13		4	13	9
14		4	14	10
15		4	14	10

$x \geqq 14$ のとき明らかに $X \geqq 10$

よって、答えは 13（本）…… [11]

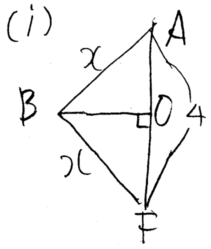
$\boxed{3}$



AF=4cm

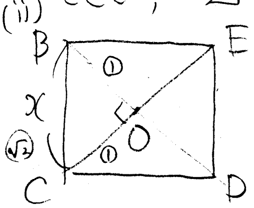
(1) 1辺の長さをxとする。

(i)



AFの中点をOとすると，Oは正方形BCDEの中心である.

(ii) ここで，△BCOは45度定規だから，3辺の比は $1:1:\sqrt{2}$



よって，$BO:BC=1:\sqrt{2}$

$$\sqrt{2}BO=BC$$

$$BO=\frac{BC}{\sqrt{2}}=\frac{x}{\sqrt{2}}$$ (このまま!)

上の(i)図で $AO=2$.

△ABOで三平方の定理を用いると

$$AB^2=BO^2+AO^2$$

$$x^2=\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+2^2$$

$$x^2=\frac{x^2}{2}+4$$

両辺に2をかけて，分母をはらうと

$$2x^2=x^2+8$$

$$x^2=8$$

$x>0$より $x=\sqrt{8}=\underline{2\sqrt{2}}$ (cm)

……[12]

(2) Hは(1)のOと一致.

四角錐F-BCDEは合同な4つの三角錐H-BFE, H-CFB, H-DFC, H-EFDに分けられる.

よって，求める体積は四角錐F-BCDEの$\frac{1}{4}$であるから

$$\frac{1}{3}\times(2\sqrt{2})^2\times2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\times8\times2\times\frac{1}{4}$$

$$=\underline{\frac{4}{3}}\ (\mathrm{cm}^3)\ \cdots[13]$$

(3) 三角錐A-BFCの体積Vを2通りに計算する.

$\boxed{その1}$ 正八面体の体積の$\frac{1}{4}$だから，

下の三角錐FBCDE

$$V=\underbrace{\frac{1}{3}\times(2\sqrt{2})^2\times2\times2}_{正三角錐A-BCD}\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{3}\times8\times2\times2\times\frac{1}{4}=\frac{8}{3}\cdots ⓐ$$

$\boxed{その2}$ △BFCを底面と見る.

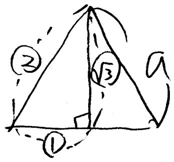
点Aと平面BFCとの距離をh(cm)とすると，

$$V=\frac{1}{3}\times\triangle BFC\times h=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{2})^2\times h$$

次に解説

解説ー 1辺がaの正三角形の面積は

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$



① $=\frac{a}{2}$，$\sqrt{3}$ $=\frac{\sqrt{3}a}{2}$

より

面積は

$\frac{1}{2}\times(2\times①)\times\sqrt{3}$

$=\frac{1}{2}\times2\times\frac{a}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

(※) 覚えておくと格段に計算が速くなる。→ 時間短縮!!

$=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}_1}\times\overset{2}{\cancel{8}}\times h=\frac{2\sqrt{3}}{3}h\cdots$ ⓑ

よって、ⓐ=ⓑ より

$\frac{8}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}h$ (両辺を入れ替え)

$\frac{2\sqrt{3}}{3}h=\frac{8}{3}$

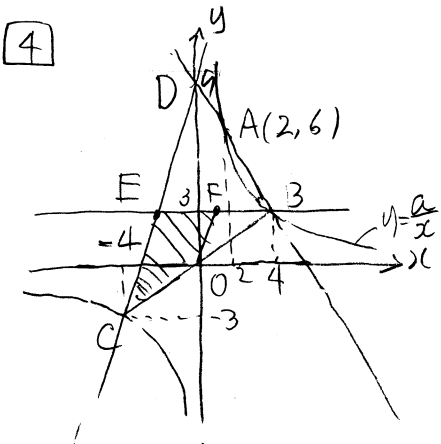
両辺に $\frac{3}{2\sqrt{3}}$ をかけて

$h=\frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{3}_1}\times\frac{\cancel{3}^1}{\cancel{2}_1\sqrt{3}}$

$=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$

$=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (cm) …… [14]

$\boxed{4}$



(1) $y=\frac{a}{x}$ は点A(2,6)を通るから

$6=\frac{a}{2}$

両辺に2をかけて

$6\times2=\frac{a}{2}\times2$

$12=a$

よって、$a=12$ …… [15]

(2) B(4,3)より 直線ABの方程式は、傾きが $\frac{3-6}{4-2}=\frac{-3}{2}$ だから

$y=-\frac{3}{2}x+b$ とおける。

点A(2,6)を通るから

$6=-\frac{3}{2}\times2+b$，$-3+b=6$

$b=6+3$，$b=9$

よって、$y=-\frac{3}{2}x+9$

D(0,9)

また、Eのx座標を求める。

直線CDの方程式は、傾き$\frac{12}{4}=3$、切片が9だから

$y=3x+9$

y=3を代入して

$3=3x+9$

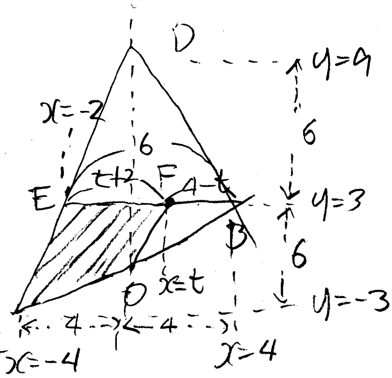
$3x+9=3$

$3x=3-9$

$3x=-6$

$x=-2$

E$(-2,3)$



さて、F$(t,3)$とおく。

$-2<t<4$である。

(四角形COFE)

$=\triangle CBE-\triangle OBF$

$=\triangle CBE-\frac{1}{2}\times\frac{BF}{BE}\times\triangle CBE$

$=\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{BF}{BE}\right)\times\triangle CBE$

$=\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{4-t}{6}\right)\times\frac{1}{2}\triangle BCD$

$=\underbrace{\frac{1}{2}\left(1-\frac{4-t}{12}\right)}\times\triangle BCD$

よって、〜〜$=\frac{2}{5}$であるから

$\frac{1}{2}\left(1-\frac{4-t}{12}\right)=\frac{2}{5}$

$\frac{1}{2}\times\frac{12-(4-t)}{12}=\frac{2}{5}$

$\frac{12-4+t}{24}=\frac{2}{5}$

$\frac{8+t}{24}=\frac{2}{5}$

両辺に120をかけて

$120\times\frac{8+t}{24}=120\times\frac{2}{5}$

$5(8+t)=24\times2$

$40+5t=48$

$5t=48-40$

$5t=8$

$t=\frac{8}{5}$ ……[16]

※直接、面積を計算した方が速かったかな？

$\triangle BCD=\triangle CBE\times2$

$=\frac{1}{2}\times6\times6\times2=36$

よって、四角形COFE$=36\times\frac{2}{5}$

ということは

$\triangle OBF=\frac{1}{2}\times36-36\times\frac{2}{5}$

$=36\times\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)$

$=36\times\left(\frac{5}{10}-\frac{4}{10}\right)$

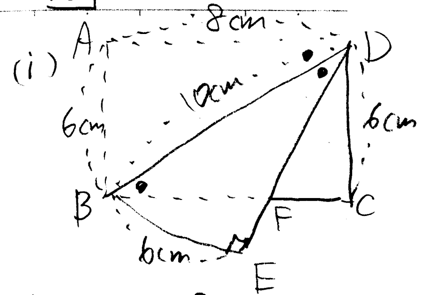
$=36\times\frac{1}{10}$

$=\frac{18}{5}$

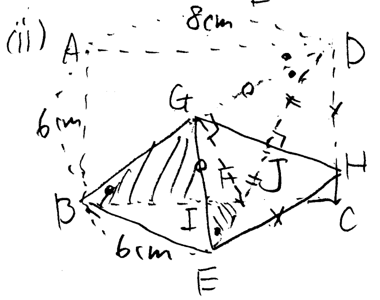
よって $\frac{1}{2}\times(4-t)\times3=\frac{18}{5}$ より、$t=\frac{8}{5}$

5

(i)



(ii)



(1) △IGBと△IFEにおいて

∠BIG=∠EIF(対頂角)

∠IBG=∠ADB(錯角)

(i)図より∠ADB=∠IEF

よって、∠IBG=∠IEF

2組の角がそれぞれ等しいから

△IGB∽△IFE // …[17]

(2) まず、$BD=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{36+64}$

$=\sqrt{100}=10$

GD=GE=xとおく。

GHとDEの交点をJとすると

△GDJ∽△BDAで、

3辺の比はどちらも6:8:10

≒3:4:5

~~よって、GD=xのとき~~

GD:DJ=5:4より

x:DJ=5:4

5DJ=4x

DJ=$\frac{4}{5}x$

DE=2DJ、DE=DA=8より

$8=2\times\frac{4}{5}x$, $\frac{8}{5}x=8$, $8x=40$

$x=5$

よって、DG=5, BG=5, GE=5

EF=yとおくと、FD=8−y=BF

GはBDの中点で、FD=FBよりFG⊥BD

よって、△FGD∽△BAD point!!

3辺の比が3:4:5より

DF:DG=5:4で DG=5より

DF:5=5:4

4DF=25

DF=$\frac{25}{4}$

よって $\frac{25}{4}=8-y$

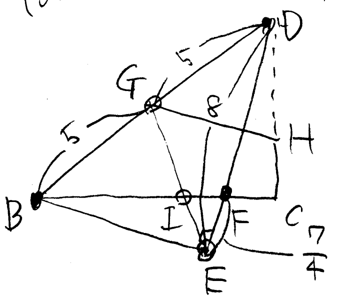
$y=8-\frac{25}{4}$

$y=\frac{32}{4}-\frac{25}{4}$

$y=\frac{7}{4}$(cm) ….[18]

※ 目で追うだけならこんなにたくさん書く必要はありませんが….

(3)



△DFBでメネラウスの定理を用いると（•→○→•→○…の順）

$$\frac{DE}{EF}\times\frac{FI}{IB}\times\frac{BG}{GD}=1 \text{ より}$$

$$\frac{8}{\frac{7}{4}}\times\frac{FI}{IB}\times\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{5}_{1}}=1$$

$$\to 8\div\frac{7}{4}=8\times\frac{4}{7}=\frac{32}{7}$$

$$\frac{32}{7}\times\frac{FI}{IB}=1$$

よって、両辺に$\frac{7}{32}$をかけて

$$\frac{FI}{IB}=\frac{7}{32}$$

$$FI:IB=7:32$$

よって、

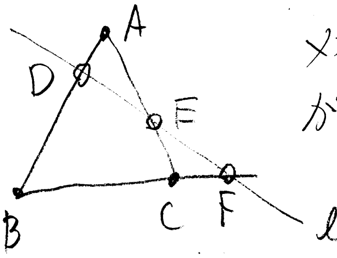
$$BI=\frac{32}{7+32}\times BF$$

$$=\frac{\cancel{32}^{8}}{39}\times\frac{25}{\cancel{4}_{1}}$$

$$=\frac{200}{39} \quad \cdots\cdots [19]$$

解説　メネラウスの定理

△ABCの各辺またはその延長上と交わる直線lがあるとき、



メネラウスの定理が成り立つ。

•→○→•→○…の順に。

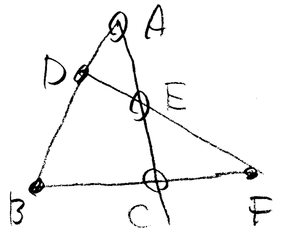
$$\frac{AD}{DB}\times\frac{BF}{FC}\times\frac{CE}{EA}=1$$

どの•から出発してもOKです。

たとえば、Bから出発（時計回り）すると

$$\frac{BD}{DA}\times\frac{AE}{EC}\times\frac{CF}{FB}=1$$

また、同じ図で、△BFDに直線ACが交わっていると見ると



Bから反時計回りに。

$$\frac{BC}{CF}\times\frac{FE}{ED}\times\frac{DA}{AB}=1$$

と考えてもOKです。

$\boxed{6}$ つけ足していく矢印について

右矢印⇒の増え方

$1 \to 3 \to 5 \to$

上矢印⇑の増え方

$1 \to 3 \to 5 \to \cdots$

左矢印⇐の増え方

$2 \to 4 \to 6 \to \cdots$

下矢印⇓の増え方

$2 \to 4 \to 6 \to \cdots$

(1) 数値ボックスに入力する数をn，そのときの矢印の個数の合計をX_nとすると

$X_1 = 1+1+2+2 = 6$ （右，上，左，下の順に）

$X_2 = X_1 + 3+3+4+4 = 6+6+8 = 20$

$X_3 = X_2 + 5+5+6+6 = 20+10+12 = 42$

$X_4 = X_3 + 7+7+8+8 = 42+14+16 = \underline{72}$

(2)

$\underbrace{\overset{2\times1}{2}+\overset{2\times2}{4}+\overset{2\times3}{6}+\cdots+\overset{2\times20=40}{\square}}_{20個} = 2+4+6+\cdots+40 \quad \cdots [20]$

$= 2(1+2+3+\cdots+20)$

$2 \times \dfrac{20\times21}{2} = \underline{420}$ 個

$\boxed{解説 \ 1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)}$

(3) 差をY_nとすると

$Y =$ 上＋左＋下－右

$= \cancel{(1+3+5+\cdots+(2n-1))}$

$+ (2+4+6+\cdots+2n)$

$+ (2+4+6+\cdots+2n)$

$- \cancel{(1+3+5+\cdots+(2n-1))}$

$= 2(2+4+6+\cdots+2n)$

$= 4(1+2+3+\cdots+n)$

$= 4 \times \frac{1}{2}n(n+1)$

$= 2n(n+1)$

よって，$2n(n+1) = 6160$

$2n^2+2n = 6160$

$2n^2+2n-6160 = 0$

$n^2+n-3080 = 0$

$3080 = 2^3\times5\times7\times11$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 3080 \\ 2 & 1540 \\ 2 & 770 \\ 5 & 385 \\ 7 & 77 \\ & 11 \end{array}$$

差が1になるように$2^3\times5\times7\times11$を2つの整数の積に分けよう。

$55^2 = 3025$ （3080に近い）より

$2^3\times5\times7\times11 = (5\times11)\times(2^3\times7)$

$= 55\times56$ OK

よって $(n-55)(n+56) = 0$

$n>0$より $n = \underline{55} \quad \cdots [22]$

※前期にしては手強すぎる.

$\boxed{1}$ はまあいいとして, $\boxed{2}$ の(1), (2)はどちらも面倒くさい. こんなの会場で解ける生徒何人いるのレベル。とくに(2)は1, 2, 3, …と順に考えていくと, 第1四分位数は3, 4でほぼ一定, 第3四分位数は $x=12$ を越えると増加していくことが分かるので, 全部表を埋めなくてもよい. にしても, 出題意図は?まるで, 大学入試レベルです. $\boxed{3}$ は頻出です。最近八面体はやっているのかというくらいよく見かけます。とりあえず三平方の定理で(1)を解き, (2)は対称性に着目(カンでもOK). (3)は点と平面との距離を求めよという超頻出問題。解法を暗記しよう. 他にも応用がきくぞ。

$\boxed{4}$ はまずまず。(1)は何として解いておきたい. (2)は別解で示したように比ではなく, 直接計算の方が容易だった。

$\boxed{5}$ これは難問。長方形の折り返しは至るところに△ABCと相似な三角形が現れます。また, 二等辺も現れますので, 上手に利用しましょう.

(3)で「メネラウスの定理」が登場しました。これを使わなければ, まず時間オーバー確実。絶対覚えましょう。もう一つ「チェバの定理」というのもあります.

$\boxed{6}$ (1)は解きたい. (2)以降は $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ を使わないと解けません。(2)は $1+2+3+\cdots+20$ を実際に計算できますが, (3)はムリです.

メネラウスの定理と $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ を覚えよう!!

(以上)