斜回転体の体積

曲線 $x=-y^2+2$, 直線 $y=x-2$, 直線 $y=-x$ で囲まれた部分を直線 $y=-x$ の周りに一回転させてできる立体の体積を求めよ。

考え方

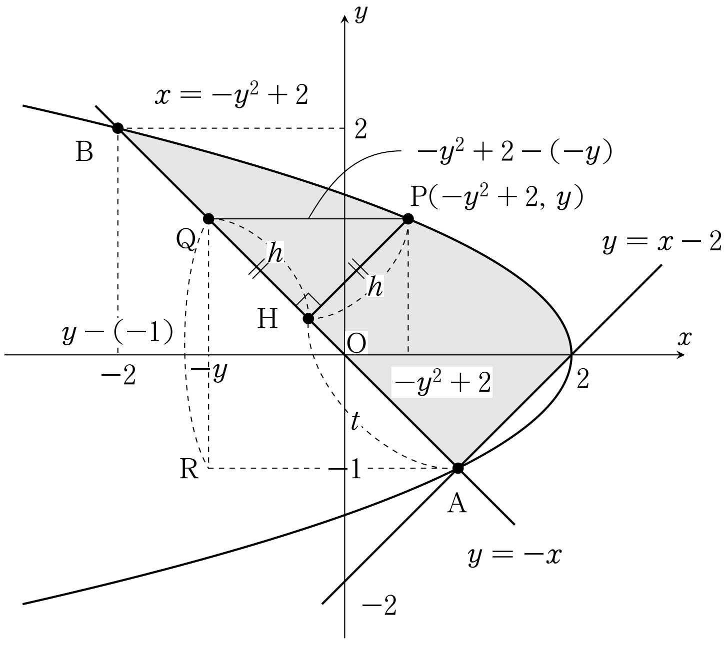
普通は，$y=x^2$ 系統の放物線が出題されるが，2次曲線は珍しい。それゆえ，本問のように横向きの放物線では y が主役になるので少し考えにくいかもしれない。もし，考えにくすぎなら，グラフ全体を -90 度回転して考えればよい。本問では，このまま y を主役にする方針で解くことにする。

立体の定積分の基本

① **軸，原点を設定する** …… 本問では直線 $y=-x$ を軸（つまり t 軸）にとり，原点を $\mathrm{A}(1,\ -1)$ とする。

② **軸に垂直な平面**で立体を切断する

③ 切断面の面積を端から端まで積分する



普通は t 軸 に設定した直線 $y=-x$ 上の点 H で t 軸 に垂直な平面で切断する。切断面と放物線 $x=-y^2+2$ の交点を P とする。と考えると，結構めんどうな計算になる。ここでは，直線 $y=-x$ が x 軸，y 軸 と $45°$ の角度をなしていることに着目すれば，$1:1:\sqrt{2}$ を使うだけで HP の長さが計算できる。HP が求められれば，切断面の円の半径が HP であるから，切断面の面積は $\pi\mathrm{HP}^2$ と求められる。では，やってみよう。

解

放物線 $x=-y^2+2$ 上の点 $\mathrm{P}(-y^2+2,\ y)$ から直線 $y=-x$ に下ろした垂線の足をH，点Pを通り x 軸と平行な直線と直線 $y=-x$ との交点をQとする。

PH$=h$ とすると，QH=PH，PH$=h=\dfrac{\mathrm{PQ}}{\sqrt{2}}$ である。

PQ$=(-y^2+2)-(-y)=-y^2+y+2$ であるから

$$h=\frac{-y^2+y+2}{\sqrt{2}} \cdots\cdots \text{これが切断面の円の半径}$$

である。

次に積分する範囲を考える。点Pは点 $(2,\ 0)$ から点Bまで動く。t に変換すると，0から $(\mathrm{AB}=)3\sqrt{2}$ まで動く。

また，点 $(1,\ -1),\ (2,\ 2)$ をそれぞれA，Bとすると，

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(-2-1)^2+\{2-(-1)\}^2}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$$

何も三平方の定理を使わなくても，$1:1:\sqrt{2}$ を使えば簡単に出る。こちらの方法を推奨する。

よって，

$$V=\pi\int_0^{3\sqrt{2}}\mathrm{PH}^2dt=\pi\int_0^{3\sqrt{2}}\left(\frac{-y^2+y+2}{\sqrt{2}}\right)^2dt$$

積分変数は t なので，これを y に変える必要がある。そこで，t と y の関係式を考え，次に積分する範囲を考える。

ここで，t と y の関係を考える。

直角二等辺三角形 $\triangle\mathrm{AQR}$ について考える。QR$=y-(-1)$ であるから，AQ$=t+h=\sqrt{2}$QR

$$\begin{aligned} t&=\mathrm{AQ}-h=\sqrt{2}\{1-(-y)\}-\frac{-y^2+y+2}{\sqrt{2}}\\ &=\sqrt{2}(1+y)-\frac{\sqrt{2}}{2}(-y^2+y+2)\\ &=\frac{\sqrt{2}}{2}y^2+\frac{\sqrt{2}}{2}y\\ &=\frac{\sqrt{2}}{2}(y^2+y) \end{aligned}$$

よって，$dt = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(2y+1)$

t	0	$\to$	$3\sqrt{2}$
y	0	$\to$	2

（点 P は点 (2, 0) から点 B(−2, 2) まで動く）

したがって

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^{3\sqrt{2}}\left(\frac{-y^2+y+2}{\sqrt{2}}\right)^2 dt \\
&= \pi\int_0^2 \frac{1}{2}(y^2-y-2)^2\frac{\sqrt{2}}{2}(2y+1))dy \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\int_0^2 (y^2-y-2)^2(2y+1)dy \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\int_0^2 (y^4-2y^3-3y^2+4y+4)(2y+1)dy \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\int_0^2 (2y^5-3y^4-8y^3+5y^2+12y+4)dy \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\left[\frac{1}{3}y^6-\frac{3}{5}y^5-2y^4+\frac{5}{3}y^3+6y^2+4y\right]_0^2 \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\left(\frac{1}{3}\cdot 2^6-\frac{3}{5}\cdot 2^5-2\cdot 2^4+\frac{5}{3}\cdot 2^3+6\cdot 2^2+4\cdot 2\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\cdot 2^3\left(\frac{1}{3}\cdot 2^3-\frac{3}{5}\cdot 2^2-2\cdot 2+\frac{5}{3}+3+1\right) \\
&= 2\sqrt{2}\pi\left(\frac{8}{3}-\frac{12}{5}-4+\frac{5}{3}+3+1\right) \\
&= 2\sqrt{2}\pi\left(2+\frac{2}{3}-2-\frac{2}{5}-4+1+\frac{2}{3}+3+1\right) \\
&= 2\sqrt{2}\pi\left(1+\frac{2}{3}-\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\right) \\
&= 2\sqrt{2}\pi\left(1+\frac{4}{3}-\frac{2}{5}\right) \\
&= 2\sqrt{2}\pi\cdot\frac{15+20-6}{15} \\
&= 2\sqrt{2}\pi\cdot\frac{29}{15} \\
&= \boldsymbol{\frac{58\sqrt{2}}{15}\pi}
\end{aligned}$$