数学・全国大学入試めぐり第 47 回

東京大学　2 月 25 日（火）

理系 150 分 120 点，文系 100 分 80 点

理系：数学 I，数学 II，数学 III，数学Ａ，数学Ｂ（「数列」，「統計的な推測」），数学Ｃ（「ベクトル」，「平面上の曲線」，「複素数平面」）

文系：数学 I，数学 II，数学Ａ，数学Ｂ（「数列」，「統計的な推測」），数学Ｃ（「ベクトル」）

理系　❶❷❸❹❺❻　文系　❼❽❾❿

❻　複素数平面上の点 $\dfrac{1}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の周から原点を除いた曲線を C とする。

(1) 曲線 C 上の複素数 z に対し，$\dfrac{1}{z}$ の実部は 1 であることを示せ。

(2) α, β を曲線 C 上の相異なる複素数とするとき，$\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$ がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。

(3) γ を (2) で求めた範囲に属さない複素数とするとき，$\dfrac{1}{\gamma}$ の実部がとりうる値の最大値と最小値を求めよ。

複素数平面の問題です。私が教えている生徒（地方公立高校 3 年）は「複素数の問題は何をしていいのかわからない。」と言っています。しかし，心配いりません。最近は本格的な複素数の知識が問われる問題はほぼ出ていません。$|z-1|^2=1^2$ を展開して $(z-1)(\overline{z}-1)=1$ と変形することはありますが，それ以上のごつい式を展開することはまずありません。本問も $z=x+yi$ (x, y は実数) と置くだけで解決します。ちょっと前までは $x=x+yi$ とおいて計算するのは最後の手段だったのですが，時代が変わりました。

（とりあえず条件を x, y で表してみましょう。）

$z=x+yi$ (x, y は実数) と置くと，条件より，x, y は

$$(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

を満たす。展開して整理すると

$$x^2-x+\frac{1}{4}+y^2=\frac{1}{4}$$
$$\iff x^2+y^2=x,\quad \text{ただし } x^2+y^2 \neq 0 \cdots\cdots ①$$

(1)（では実際に $\dfrac{1}{z}$ の実部を求めてみましょう。分母を実数化します。）

$$\begin{aligned}\frac{1}{z}&=\frac{1}{x+yi}=\frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)}\\&=\frac{x-yi}{x^2-y^2i^2}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}\\&=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i\end{aligned}$$

したがって，$\dfrac{1}{z}$ の実部は $\dfrac{x}{x^2+y^2}$ である。すると ① から

$$\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{x}{x}=1$$

よって，$\dfrac{1}{z}$ の実部は 1 であることが示された。

✐**注** さてどうでしたか。これなら誰にでもできそうです。(2) に進みましょう。

(2) $\left(\text{ここでは (1) の結果を利用して}, \dfrac{1}{\alpha}=1+pi,\ \dfrac{1}{\beta}=1+qi\ \text{と置きましょう。}\right)$

α, β は曲線 C 上の相異なる複素数だから，(1) より，$\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}$ の実部はどちらも 1 である。

よって，p, q を相異なる実数として

$$\frac{1}{\alpha}=1+pi, \qquad \frac{1}{\beta}=1+qi$$

と置くことができる。

すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}&=(1+pi)^2+(1+qi)^2\\&=(1+2pi+p^2i^2)+(1+2qi+q^2i^2)\\&=\{(1-p^2)+2pi\}+\{(1-q^2)+2qi\}\\&=(2-p^2-q^2)+2(p+q)i\end{aligned}$$

そこで，$\mathrm{X}=2-p^2-q^2$，$\mathrm{Y}=2(p+q)$ と置く。

p, q が任意の実数をとって動くとき，点 (X, Y) の動く範囲を考えればよい。

（普通の軌跡の問題では，p, q を消去して X, Y だけの式に変形するのですが，ここでは p, q を消去をすることができそうにありません。そこで形をよく見ると p, q の対称式になっています。そこで次のように考えます。）

$p+q=s,\ pq=t$ とおくと，p, q は x の 2 次方程式

$$x^2-sx+t=0 \cdots\cdots ②$$

の異なる 2 つの実数解である。② の判別式を D とすると

$$\mathrm{D}=(-s)^2-4\cdot1\cdot t=s^2-4t>0 \cdots\cdots ③$$

（以下，s, t を X, Y で表すことを考えます。）

一方，

$$\mathrm{X}=2-(p^2+q^2)=2-\{(p+q)^2-2pq\}=2-(s^2-2t) \cdots\cdots ④$$

$$\mathrm{Y}=2s \Longleftrightarrow s=\frac{1}{2}Y \cdots\cdots ⑤$$ ［s は Y で表すことができました。次は t です。］

⑤ を ④ に代入して

$$\mathrm{X}=2-\left\{\left(\frac{1}{2}Y\right)^2-2t\right\}$$

（これを $t=\cdots$ の形に変形します。）

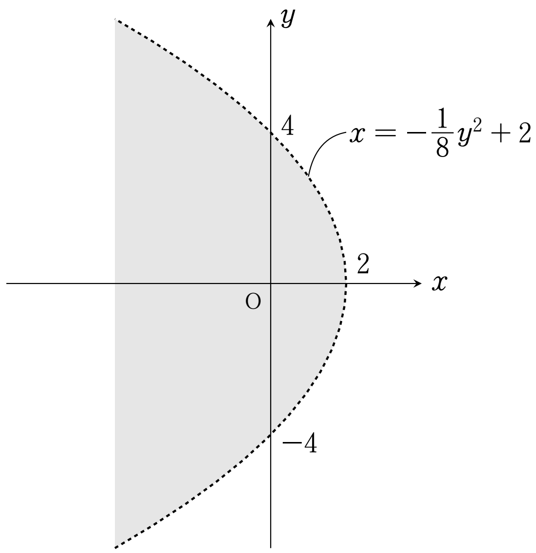
よって

$$\mathrm{X}=2-\frac{1}{4}\mathrm{Y}^2+2t$$
$$-2t=2-\mathrm{X}-\frac{1}{4}\mathrm{Y}^2$$
$$2t=\mathrm{X}+\frac{1}{4}\mathrm{Y}^2-2 \cdots\cdots ⑥$$

⑤，⑥ を ③ に代入すると

$$\left(\frac{1}{2}\mathrm{Y}\right)^2-2\left(\mathrm{X}+\frac{1}{4}\mathrm{Y}^2-2\right)>0$$
$$\frac{1}{4}\mathrm{Y}^2-2\mathrm{X}-\frac{1}{2}\mathrm{Y}^2+4>0$$
$$-2\mathrm{X}>\frac{1}{4}\mathrm{Y}^2-4$$
$$\mathrm{X}<-\frac{1}{8}\mathrm{Y}^2+2$$

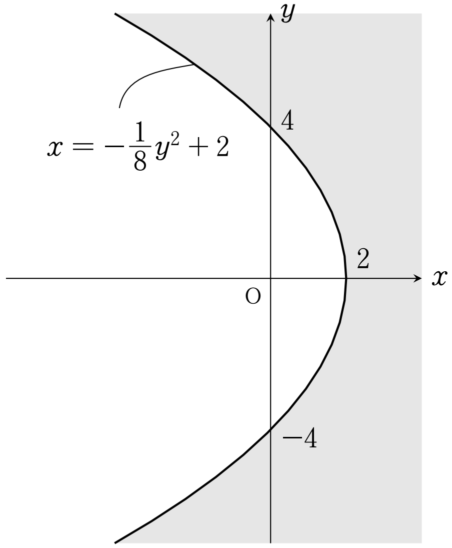
よって，点 (x, y) は放物線 $x=-\dfrac{1}{8}y^2+2$ で分けられた平面上の原点を含む網目部分を表す。ただし，境界線は含まない。



(3)　さて，いよいよ (3) に突入です。「γ は (2) で求めた範囲に属さない複素数とする」とは，$\dfrac{1}{\gamma}$ の実部が 1 ではないということと同値です。これを数式で表すのはちょっと難しいので，後で考えることにしましょう。

さっそく，$\gamma=x+yi$ (x, y は実数) と置く。γ は (2) で求めた範囲には存在しない。ということは，点 (x, y) は領域 $x \geqq -\dfrac{1}{8}y^2+2$ (境界を含む) 部分に存在することになります。次ページの図を参照されたし。

$\left(\dfrac{1}{\gamma}\right.$ の実数部分を計算しましょう。(2) で行った計算とほぼ同じです。$\left.\right)$



$$\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{x+yi}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}$$

であるから，$\frac{1}{\gamma}$ の実数部分は $\frac{x}{x^2+y^2}$

点$(x,\ y)$が領域 $x \geqq -\frac{1}{8}y^2+2$ …… ⑦ を動くとき，$\frac{x}{x^2+y^2}$ の取り得る値の範囲を求めればよい。

これは，「$\frac{x}{x^2+y^2}=k$ …… ⑧ と置いたとき，⑧ が表す図形と領域 $\frac{x}{x^2+y^2}$ が共有点をもつような k の値の範囲を求める」と同値である。

では，⑧ がどんな図形を表すか考えよう。

係数 k を x^2+y^2 ではなく x の方に移したい（→ 両辺を k で割りたい）ので，$k=0$ と $k \neq 0$ の場合分けをしよう。

[1] $k=0$ のとき，$x=0$

このとき，⑧ に $x=0$ を代入すると　　$0 \geqq -\frac{1}{8}y^2+2$

これを解くと

$$\frac{1}{8}y^2-2 \geqq 0 \Longleftrightarrow y^2-16=(y+4)(y-4) \geqq 0$$

よって　　　　$y \leqq -4,\ 4 \leqq y$

このとき，点$(x,\ y)$は直線 $x=0$ の $y \leqq -4,\ 4 \leqq y$ の部分を動くことがわかる。これは題意をみたしている。

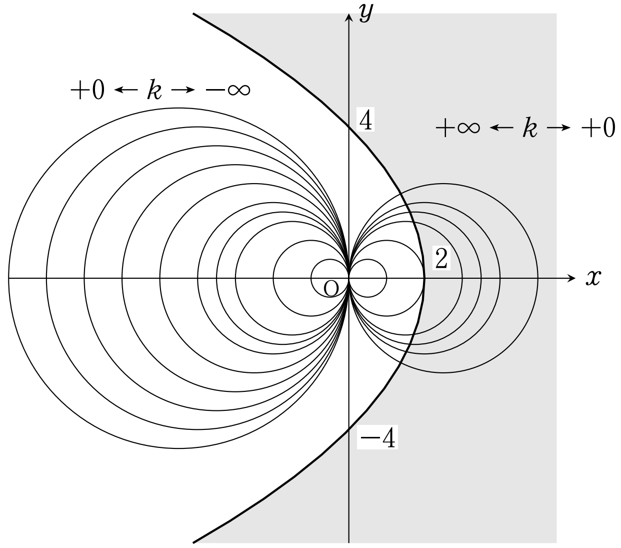
[2] $k \neq 0$ のとき，⑧ を変形して

$$x=k(x^2+y^2) \iff x^2+y^2=\frac{x}{k} \iff x^2-\frac{x}{2}+y^2=0$$

$$\iff \left(x-\frac{1}{2k}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2k}\right)^2 \quad \cdots\cdots ⑨$$

したがって，点$(x,\ y)$は中心が点$\left(\frac{1}{2k},\ 0\right)$，半径 $\frac{1}{2k}$ の円を描く。

そこで，領域 ⑧ と円 ⑨ が共有点をもつ条件を求めよう。次に k の値に対して円 ⑨ がどのような位置にくるか示す図を描いておこう。



すると， 図からわかる通り，円の中心の x 座標が 2 以上のとき 2 つの図形は必ず共有点をもつ。(もちろん，もう少し小さくても共有点をもつが，今はとりあえず 2 以上とする。) つまり，$\dfrac{1}{2k} \geqq 2$ すなわち $0 \leqq k \leqq \dfrac{1}{4}$ のときはかならず共有点をもつ。以下，円 ⑨ の中心の x 座標が 2 以下の場合を考えよう。

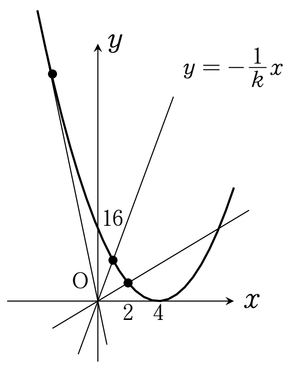
$k < 0,\ \dfrac{1}{4} \leqq k$ のとき放物線 $x = -\dfrac{1}{8}y^2 + 2$ …… ⑩ と円 ⑨ が共有点を持つ場合を考える。⑩ より $y^2 = -8x + 16$ であるから，これを円 ⑨ の方程式に代入して y を消去すると (⑨ は平方完成されているので代入がしんどそう。そこで最初から 2 つ目の式 $x^2 + y^2 = \dfrac{x}{k}$ に代入しよう。)

$$x^2 + (-8x + 16) = \frac{x}{k} \iff (x-4)^2 = \frac{x}{k}$$

よって 2 つのグラフ

$$\text{放物線 } y = (x-4)^2 \cdots\cdots ⑪ \qquad \text{直線 } y = \frac{x}{k} \cdots\cdots ⑫$$

が共有点を持つ条件を求める。ただし，$k < 0,\ \dfrac{1}{4} \leqq k$ のとき，共有点の x 座標は 2 以下であることに注意する。



⑪と⑫が第 2 象限で接するときの $\dfrac{1}{k}$ の値を求めよう。

$k(x-4)^2 = x$ つまり $kx^2 - (8k+1)x + 16k = 0$ …… ⑬

が重解をもつ。

⑬の判別式を D とすると

$$D = (8k+1)^2 - 4 \cdot k \cdot 16k = 0$$

よって

$$64k^2+16k+1-64k^2=0$$
$$16k=-1$$
$$k=-\frac{1}{16}$$
また，直線⑫が点 $(2,\ 4)$ を通るとき
$$4=\frac{2}{k} \iff k=\frac{1}{2}$$
k の挙動が難しいので，傾き $\dfrac{1}{k}$ で考えて不等式を立てると
$$\frac{1}{k} \leqq -16, \quad 2 \leqq \frac{1}{k}$$
よって $\quad -\dfrac{1}{16} \leqq k \leqq 0, \quad \dfrac{1}{k} \leqq \dfrac{1}{2}$

以上［1］，［2］から， $\quad -\dfrac{1}{16} \leqq k \leqq \dfrac{1}{2}$

ゆえに， k すなわち $\dfrac{1}{\gamma}$ の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$， 最小値は $\boldsymbol{-\dfrac{1}{16}}$