数学・全国大学入試めぐり第 47 回

東京大学　2 月 25 日（火）

理系 150 分 120 点，文系 100 分 80 点

理系：数学 I，数学 II，数学 III，数学A，数学B（「数列」，「統計的な推測」），数学C（「ベクトル」，「平面上の曲線」，「複素数平面」）

文系：数学 I，数学 II，数学A，数学B（「数列」，「統計的な推測」），数学C（「ベクトル」）

理系 ❶❷❸❹❺❻　文系 ❼❽❾❿

❸ 平行四辺形 ABCD において，$\angle \mathrm{ABC} = \dfrac{\pi}{6}$, $\mathrm{AB} = a$, $\mathrm{BC} = b$, $a \leqq b$ とする。次の条件を満たす長方形 EFGH を考え，その面積を S とする。

条件：点 A，B，C，D はそれぞれ辺 EF，FG，GH，HE 上にある。

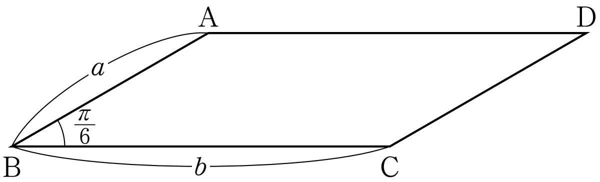
ただし，辺はその両端の点も含むものとする。

(1) $\angle \mathrm{BCG} = \theta$ とするとき，S を a, b, θ を用いて表せ。

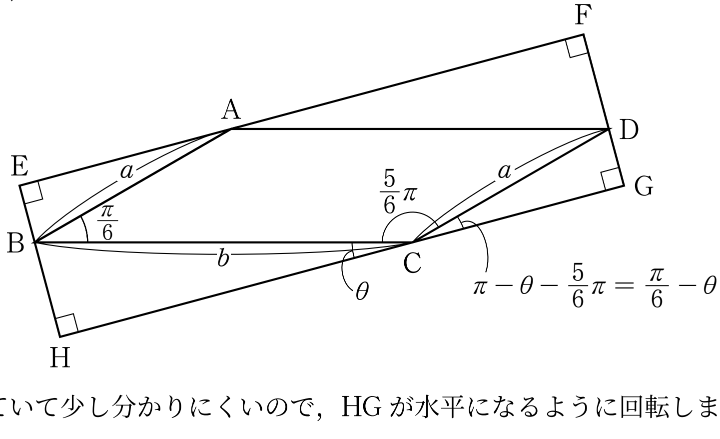
(2) S のとりうる値の最大値を a, b を用いて表せ。

(1) はそれほどでもありませんが，(2) はかなりのくせ者です。微分するほうがいいのでしょうか？ それとも微分しない方法があるのでしょうか。この解説では普通に微分して増減表をかいて最大値を求めてみようと思います。難しいおき換えや論理の飛躍がないように気を付けますね。

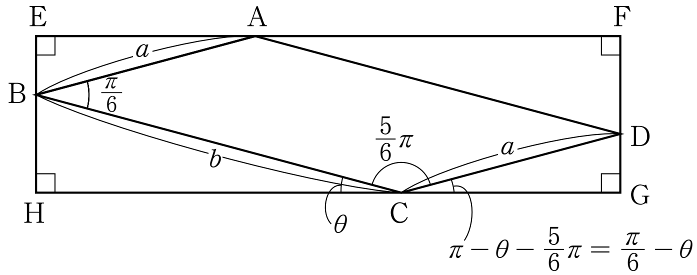
(1) 地方の公立高校の方でも，しっかり図を描いて角度を記入していけば何とかなりそうです。図を描いてみます。まず平行四辺形 ABCD です。



では，この平行四辺形に接する長方形 EFGH を描きましょう。最初は失敗してもいいので大胆に描いて，その後微調整してください。



図が斜めっていて少し分かりにくいので，HG が水平になるように回転します。



これで図はほぼ完成です。平行四辺形の向かい合う角の和は $\pi=180^\circ$ ですので，$\angle\mathrm{BCD}=\pi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5}{6}\pi$ になるのは大丈夫ですね。

それでは，S を求めてみましょう。

［解 1］ 長方形の面積は 縦×横 で求めることができたので，図の EH と HG の長さがわかれば求められそうです。図の対称性から，

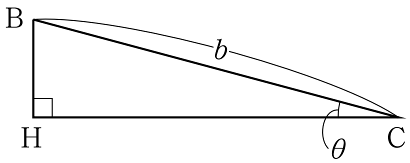
$$\mathrm{EB}=\mathrm{DG}$$

に注意すると，

$$\boldsymbol{S=\mathrm{EH}\times\mathrm{HG}=(\mathrm{BH}+\mathrm{DG})\times(\mathrm{HC}+\mathrm{CG})}\ \cdots\cdots ①$$

そこで，BH, DG, HC, CG の長さを求めよう。

右図 △BHC で，

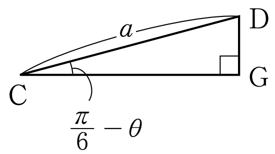


$$\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BC}}=\sin\angle\mathrm{BCH}=\sin\theta,$$
$$\frac{\mathrm{HC}}{\mathrm{BC}}=\cos\angle\mathrm{BCH}=\cos\theta$$

したがって，

$$\mathrm{BH}=\mathrm{BC}\sin\theta=b\sin\theta,\ \mathrm{HC}=\mathrm{BC}\cos\theta=b\cos\theta\ \cdots\cdots ②$$

右図 △CDG で



$$\frac{\mathrm{DG}}{\mathrm{CD}}=\sin\angle\mathrm{DCG}=\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right),$$
$$\frac{\mathrm{CG}}{\mathrm{CD}}=\cos\angle\mathrm{DCG}=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)$$

したがって，

$$\mathrm{DG}=\mathrm{CD}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)=a\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right),\ \mathrm{CG}=\mathrm{CD}\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)=a\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\ \cdots\cdots ③$$

②，③ を ① に代入することによって

$$\begin{aligned}S&=\left\{b\sin\theta+a\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\right\}\times\left\{b\cos\theta+a\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\right\})\\&=b^2\sin\theta\cos\theta+ab\sin\theta\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)+ab\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\cos\theta+a^2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\\&=\frac{1}{2}b^2\sin 2\theta+ab\left\{\sin\theta\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)+\cos\theta\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\right\}+\frac{1}{2}a^2\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)\end{aligned}$$

中括弧の中は sin の加法定理

$$\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

を用いる。$\alpha=\theta,\ \beta=\dfrac{\pi}{6}-\theta$ と見ると

$$\sin\theta\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)+\cos\theta\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)=\sin\left\{\theta+\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\right\}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

よって,

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}b^2\sin 2\theta+ab\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a^2\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}b^2\sin 2\theta+\frac{1}{2}a^2\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)+\frac{1}{2}ab}\end{aligned}$$

[解 2] [解 1] では最後の展開と加法定理の利用がすこし面倒くさかったので，S の求め方を変えてみよう。[解 2] では，中央の平行四辺形の面積と周囲の 4 つの三角形面積を足して求めてみるのはどうでしょう。

図形の対称性により

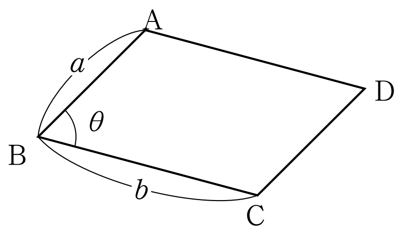
$$\boldsymbol{S=(\text{平行四辺形 ABCD})+2\triangle\mathrm{BCH}+2\triangle\mathrm{CDG}}$$

ここで，BH，HC，CG，GD の値は [解 1] で求めた値を利用しよう。

また，平行四辺形の面積は

右図のような平行四辺形 ABCD の面積は次の公式で求めることができる。

$$\boldsymbol{S=ab\sin\theta}$$



よって平行四辺形 ABCD の面積は

$$\mathrm{BA}\times\mathrm{BC}\times\sin\frac{\pi}{6}=ab\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}ab}$$

また

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{BCH}&=\frac{1}{2}\times\mathrm{HC}\times\mathrm{BH}=\frac{1}{2}\times b\cos\theta\times b\sin\theta=\frac{1}{2}b^2\sin\theta\cos\theta\\&=\frac{1}{2}b^2\sin\theta\cos\theta=\boldsymbol{\frac{1}{4}b^2\sin 2\theta}\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{CDG}&=\frac{1}{2}\times\mathrm{CG}\times\mathrm{DG}=\frac{1}{2}\times a\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\times a\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\\&=\frac{1}{2}a^2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)=\boldsymbol{\frac{1}{4}a^2\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}&=\frac{1}{2}ab+2\times\frac{1}{4}b^2\sin 2\theta+2\times\frac{1}{4}a^2\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}b^2\sin 2\theta+\frac{1}{2}a^2\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)+\frac{1}{2}ab}\end{aligned}$$

さてどうでしたか。たぶん，ここらへんまでは余裕で理解できているならたいしたものです。次は(2)に入りましょう。

(2) 次はSの最大値を求める問題です。最大値ですので，「微分して増減表」が一般的な解法だと思います。それで行ってみましょう。

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{d\theta} &= \frac{1}{2}b^2 \cdot 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}a^2 \cdot (-2)\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\theta\right) \\
&= b^2\cos 2\theta - a^2\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\theta\right)
\end{aligned}$$

（このままでは何もできないので，加法定理で展開します）

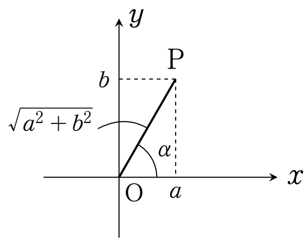
$$\begin{aligned}
&= b^2\cos 2\theta - a^2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos 2\theta + \sin\frac{\pi}{3}\sin 2\theta\right) \\
&= b^2\cos 2\theta - a^2\left(\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta\right)
\end{aligned}$$

（sin, cosの順に整理します）

$$\begin{aligned}
&= b^2\cos 2\theta - \frac{1}{2}a^2\cos 2\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}a^2\sin 2\theta \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\sin 2\theta + \left(b^2 - \frac{1}{2}a^2\right)\cos 2\theta
\end{aligned}$$

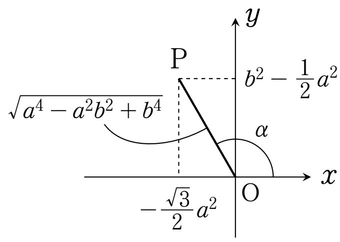
（$\dfrac{dS}{d\theta}$の符号を調べるために，合成します）

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\right)^2 + \left(b^2 - \frac{1}{2}a^2\right)^2} &= \sqrt{\frac{3}{4}a^4 + \left(b^4 - 2\cdot\frac{1}{2}a^2b^2 + \frac{1}{4}a^4\right)} \\
&= \sqrt{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}
\end{aligned}$$

> 三角関数の合成
>
> $$\boldsymbol{a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)}$$
>
> のように変形することを合成するという。
>
> 
>

よって

$$\frac{dS}{d\theta} = \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}\sin(2\theta + \alpha)$$



ただし，αは

$$\sin\alpha = \frac{b^2 - \dfrac{1}{2}a^2}{\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}},$$

$$\cos\alpha = \frac{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2}{\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}$$

を満たす角である。

（ここで α の大きさを考えます。だいたい第何象限

に属するかを判別します。）

$a>0$ より $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2<0$

$a\leqq b$ より $b^2-\dfrac{1}{2}a^2>b^2-a^2\geqq 0$　よって $b^2-\dfrac{1}{2}a^2>0$

したがって，点 P の x 座標は負，y 座標は正だから，α は第 2 象限に属する。

よって，　$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ …… ④

次に，θ の取り得る値の範囲（定義域）を調べよう。1 ページ目の最後の図，または 2 ページ目の最初の図から

$$\angle\mathrm{BCH}=\theta\geqq 0 \quad \text{かつ} \quad \angle\mathrm{DCG}=\frac{\pi}{6}-\theta\geqq 0$$

したがって　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ …… ⑤

ここで，$\dfrac{dS}{d\theta}=\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}\sin(2\theta+\alpha)$ の符号を考えるのですが，順序として

まず，$2\theta+\alpha$ の範囲を考えてみましょう。

④と⑤から　$\left(\dfrac{\pi}{2}<\right)\alpha\leqq 2\theta+\alpha\leqq\dfrac{\pi}{3}+\alpha\left(\leqq\dfrac{\pi}{3}+\pi=\dfrac{4}{3}\pi\right)$ …… ⑥

$\sin(2\theta+\alpha)=0$ となるのは，$2\theta+\alpha=n\pi$（n は整数）のときであるから，$2\theta+\alpha=\pi$ のときと考えてよい。

しかし，$\alpha<\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，⑥の第 3 辺 $\dfrac{\pi}{3}+\alpha<\pi$ であるから，⑥は π を含まない。

以上から，[1] $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{2}{3}\pi$, [2] $\dfrac{2}{3}\pi\leqq\alpha<\pi$ にわけて考えよう。

[1] $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，

$$\frac{\pi}{2}<\alpha\leqq 2\theta+\alpha\leqq\frac{\pi}{3}+\alpha<\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi=\pi \text{ …… ⑦}$$

つまり　$\dfrac{\pi}{2}<2\theta+\alpha<\pi$ …… ⑧

このとき $\dfrac{dS}{d\theta}=\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}\sin(2\theta+\alpha)>0$

したがって，S は単調に増加する。よって，S は $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ で最大値

（3 ページ目最初のほうの $\boldsymbol{S=\dfrac{1}{2}b^2\sin 2\theta+\dfrac{1}{2}a^2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2\theta\right)+\dfrac{1}{2}ab}$ に代入して）

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}b^2\sin 2\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}a^2\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\cdot\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}ab\\
=&\frac{1}{2}b^2\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}a^2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}ab\\
=&\frac{1}{2}b^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}a^2\sin 0+\frac{1}{2}ab\\
=&\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}b^2+\frac{1}{2}ab}
\end{aligned}$$

（実際に α が $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{2}{3}\pi$ を満たすことがあるかどうかを確認します。）

ここで

$$\sin\alpha=\frac{b^2-\dfrac{1}{2}a^2}{\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}},\quad \cos\alpha=\frac{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2}{\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}$$

であったから，$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{2}{3}\pi$ のとき

$$\sin\alpha=\frac{b^2-\dfrac{1}{2}a^2}{\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}>\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cdots\cdots ⑨$$

$$\cos\frac{2}{3}\pi<\cos\alpha=\frac{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2}{\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}<\cos\frac{\pi}{2}$$

つまり
$$-\frac{1}{2}<\frac{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2}{\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}<0\ \cdots\cdots ⑩$$

⑨ の分母を払うと

$$2\left(b^2-\frac{1}{2}a^2\right)>\sqrt{3}\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}$$

両辺とも正だから，両辺を 2 乗すると

$$4\left(b^2-\frac{1}{2}a^2\right)^2>3(a^4-a^2b^2+b^4)$$

$$4\left(b^4-a^2b^2+\frac{1}{4}a^2\right)>3(a^4-a^2b^2+b^4)$$

$$4b^4-4a^2b^2+a^2>3a^4-3a^2b^2+3b^4$$

$$b^4-a^2b^2-2a^2>0$$

$$(b^2+a^2)(b^2-2a^2)>0$$

$b^2+a^2>0$ だから $b^2-2a^2>0$

a, b は正の数で $b>a$ であることから　　$b>\sqrt{2}a$

よって，$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{2}{3}\pi$ となり得ることが示された。

[2] $\dfrac{2}{3}\pi<\alpha<\pi$ のとき

$$\frac{2}{3}\pi\leqq 2\theta+\alpha\leqq\frac{\pi}{3}+\pi$$

このとき，$\dfrac{dS}{d\theta}=0$ とすると $2\theta+\alpha=\pi$ つまり $\theta=\dfrac{\pi-\alpha}{2}$

よって，増減表は次の通りである。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi-\alpha}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$
$\dfrac{dS}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
S		↗		↘	

よって，S は $\theta=\dfrac{\pi-\alpha}{2}$ で最大値をとる。

最大値は,

（3 ページ目最初のほうの $\boldsymbol{S=\frac{1}{2}b^2\sin 2\theta+\frac{1}{2}a^2\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)+\frac{1}{2}ab}$ に $\boldsymbol{\theta=\frac{\pi-\alpha}{2}}$ を代入する。これからの計算がちょっとたいへんなので頑張りましょう。）

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}b^2\sin 2\theta+\frac{1}{2}a^2\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)+\frac{1}{2}ab\\
=&\frac{1}{2}b^2\sin(\pi-\alpha)+\frac{1}{2}a^2\sin\left\{\frac{\pi}{3}-(\pi-\alpha)\right\}+\frac{1}{2}ab\\
=&\frac{1}{2}b^2\sin\alpha+\frac{1}{2}a^2\sin\left(\alpha-\frac{2}{3}\pi\right)+\frac{1}{2}ab\\
=&\frac{1}{2}b^2\sin\alpha+\frac{1}{2}a^2\left(\sin\alpha\cos\frac{2}{3}\pi-\cos\alpha\sin\frac{2}{3}\pi\right)+\frac{1}{2}ab\\
=&\frac{1}{2}b^2\sin\alpha+\frac{1}{2}a^2\left(-\frac{1}{2}\sin\alpha-\cos\alpha\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{2}ab\\
=&\left(\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{4}a^2\right)\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cos\alpha+\frac{1}{2}ab\\
&\left(\text{ここで}\quad \sin\alpha=\frac{b^2-\frac{1}{2}a^2}{\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}},\quad \cos\alpha=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}a^2}{\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}\text{を代入します}\right)\\
=&\left(\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{4}a^2\right)\cdot\frac{b^2-\frac{1}{2}a^2}{\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}a^2}{\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}+\frac{1}{2}ab\\
=&\frac{1}{8}\left(2b^2-a^2\right)\cdot\frac{2b^2-a^2}{\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}+\frac{3}{8}\frac{a^4}{\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}+\frac{1}{2}ab\\
=&\frac{(2b^2-a^2)^2}{8\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}+\frac{3a^4}{8\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}+\frac{1}{2}ab\\
=&\frac{(2b^2-a^2)^2+3a^4}{8\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}+\frac{1}{2}ab\\
=&\frac{4b^4-4a^2b^2+a^4+3a^4}{8\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}+\frac{1}{2}ab\\
=&\frac{4(b^4-a^2b^2+a^4)}{8\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}+\frac{1}{2}ab\\
=&\boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{b^4-a^2b^2+a^4}+\frac{1}{2}ab}
\end{aligned}
$$

$\dfrac{2}{3}\pi<\alpha<\pi$ のとき [1] の過程から $a\leqq b\leqq\sqrt{2}a$ であることがわかる。

➾**注** かなり長くなりましたが，答案を書くときは途中計算はすべて省いて大丈夫です。ただし，α の取り得る値の範囲はしっかり書いておきましょう。上のような解き方でも，満点はとれなくても，かなりの部分点がとれると思います。そういえば，微分しないで求める方法はないのでしょうか？ ちょっと考えて見ましょう。

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}b^2\sin 2\theta+\frac{1}{2}a^2\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)+\frac{1}{2}ab}$$

（これを加法定理を用いて展開して, $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$ の式に変形します。）

$$=\frac{1}{2}b^2\sin 2\theta+\frac{1}{2}a^2\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos 2\theta-\cos\frac{\pi}{3}\sin 2\theta\right)+\frac{1}{2}ab$$

$$=\frac{1}{2}b^2\sin 2\theta+\frac{1}{2}a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)+\frac{1}{2}ab$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cos 2\theta+\left(\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{4}a^2\right)\sin 2\theta+\frac{1}{2}ab$$

ここで，$\frac{1}{2}ab$ は定数なので，除外して考えます。後から加えるのを忘れないようにしましょう。さらに，分数の係数がちょっと煩わしいので，$\frac{1}{4}$ でくくって（　）の中だけ考えることにしましょう。

$$\sqrt{3}a^2\cos 2\theta+(2b^2-a^2)\sin 2\theta$$

の最大値を考えます。この式を $T(\theta)$ と置きます。

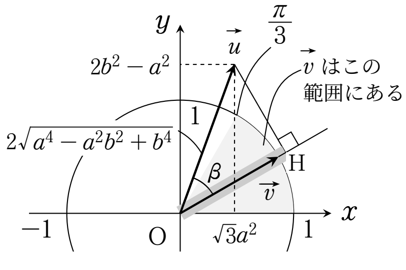
$T(\theta)$ は 2 つのベクトル $(\sqrt{3}a^2,\ 2b^2-a^2)$(＝$\vec{u}$とする), $(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$(＝$\vec{v}$とする) の内積になっています。

この 2 つのベクトルのなす角を β をすると，

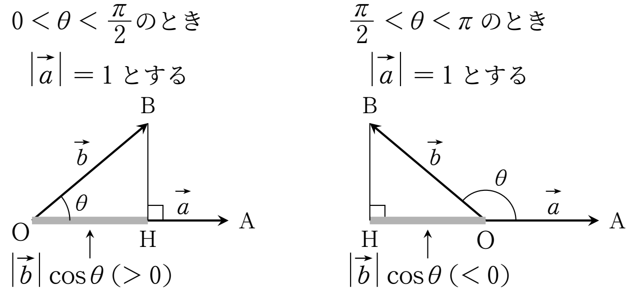
$$\begin{aligned}T(\theta)&=\sqrt{3}a^2\cos 2\theta+(2b^2-a^2)\sin 2\theta\\&=(\sqrt{3}a^2,\ 2b^2-a^2)\cdot(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)\\&=\vec{u}\cdot\vec{v}\\&=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\beta\\&(|\vec{v}|=\sqrt{\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta}=\sqrt{1}=1\text{ であるから})\\&=|\vec{u}|\cos\beta\end{aligned}$$

これは，ベクトル $\vec{u}$ のベクトル $\vec{v}$ への正射影に符号をつけたものである。($0\leqq\beta\leqq\frac{\pi}{2}$ なら，正か 0, $\frac{\pi}{2}<\beta\leqq\pi$ なら負)

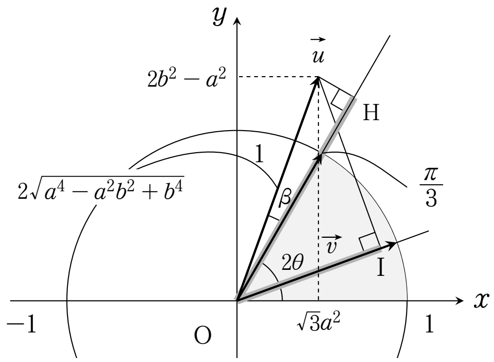
$\vec{u}=(\sqrt{3}a^2,\ 2b^2-a^2)$ について，x, y 成分とも正だから，$\vec{u}$ の終点は第 1 象限に存在する。また，$0\leqq 2\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ であるから次のような図になる。



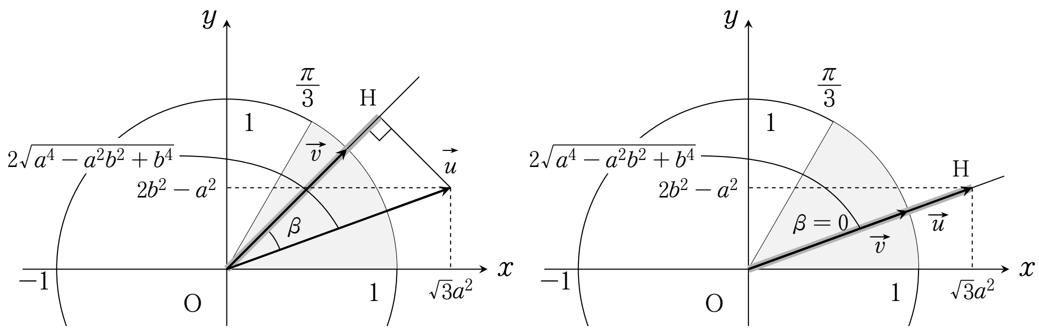
左図で，ベクトル $\vec{u}$ の終点からベクトル $\vec{v}$ またはその延長線上に下ろした垂線の足を H とすると，線分 OH の(符号つきの) 長さを，ベクトル $\vec{u}$ のベクトル $\vec{v}$ への正射影と言います。この場合，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$ なので OH>0 です。次に一般の場合を書いておきます。



したがって OH の長さが最大になる場合を考えればよいわけです。注意して欲しいのは，$\vec{u}$ は一定のベクトルで動きません。$\vec{v}$ は θ の大きさによって動きます。$\boldsymbol{0 \leqq 2\theta \leqq \frac{\pi}{3}}$ だから，$\vec{v}$ を網目部分の中で動かして考えてみよう。この場合だと，$2\theta=\frac{\pi}{3}$ すなわち $\vec{v}=\left(\cos\frac{\pi}{3},\,\sin\frac{\pi}{3}\right)$ のとき OH は最大になります。



では次のように，ベクトル $\vec{u}$ の偏角（x 軸とのなす角）が小さいときはどうでしょう。この場合は 2 つのベクトル $\vec{u}$, $\vec{v}$ が同じ向き（＝ 重なる）のとき OH は最大になります。（右図参照）



以上からベクトル $\vec{u}$ の偏角で場合分けすればよいようです。ベクトル $\vec{u}$ の偏角を γ とおくと，

$$\tan\gamma=\frac{2b^2-a^2}{\sqrt{3}a^2}$$

[1] $\frac{\pi}{3} \leqq \gamma < \frac{\pi}{2}$ すなわち $\tan\gamma \geqq \sqrt{3}$ …… ⑪のとき

$2\theta=\frac{\pi}{3}$ つまり $\theta=\frac{\pi}{6}$ で最大値

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}T\left(\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}ab &= \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}a^2\cos\frac{\pi}{3}+(2b^2-a^2)\sin\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}ab \\
&= \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a^2+\frac{\sqrt{3}}{2}(2b^2-a^2)\right\}+\frac{1}{2}ab \\
&= \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}b^2\right)+\frac{1}{2}ab \\
&= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}b^2+\frac{1}{2}ab}
\end{aligned}
$$

をとる。

［2］$0 \leqq \gamma < \dfrac{\pi}{3}$ すなわち $0 < \tan\gamma \leqq \sqrt{3}$ …… ⑫ のとき

$2\theta=\gamma$ つまり $\cos 2\theta = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{2\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}$, $\sin 2\theta = \dfrac{2b^2-a^2}{2\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}$ で最大値

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}T\left(\frac{\gamma}{2}\right)+\frac{1}{2}ab &= \frac{1}{4}\left|\vec{u}\right|+\frac{1}{2}ab \\
&= \frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}+\frac{1}{2}ab \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}+\frac{1}{2}ab}
\end{aligned}
$$

をとる。

ということで最大値はもとめられたのですが，場合分けの範囲は γ ではなく，a, b を使いたいところです。そこで，⑩，⑪を計算してみましょう。

まず［1］$\tan\gamma = \dfrac{2b^2-a^2}{\sqrt{3}\,a^2} \geqq \sqrt{3}$ を解きます。

分母を払って

$$
\begin{aligned}
2b^2-a^2 \geqq 3a^2 &\iff 2b^2 \geqq 4a^2 \\
&\iff b^2 \geqq 2a^2
\end{aligned}
$$

$0 < a \leqq b$ であるから

$$\iff \boldsymbol{b \geqq \sqrt{2}a}$$

［2］$0 < \tan\gamma = \dfrac{2b^2-a^2}{\sqrt{3}\,a^2} \leqq \sqrt{3}$ を解きます。

分母を払って

$$0 < 2b^2-a^2 \leqq 3a^2 \iff a^2 < 2b^2 \leqq 4a^2$$

$0 < a \leqq b$ であるから

$$
\begin{aligned}
&\iff a < \sqrt{2}b \leqq 2a \\
&\iff \frac{1}{\sqrt{2}}a < b \leqq \sqrt{2}a
\end{aligned}
$$

（条件より　$a \leqq b$）

$$\iff \boldsymbol{a \leqq b \leqq \sqrt{2}a}$$

この過程から，$\gamma \geqq \dfrac{\pi}{6}$ であることがわかります。答案には反映する必要はありません。

ということで，場合分けは［1］ $b \geqq \sqrt{2}a$, ［2］ $a \leqq b \leqq \sqrt{2}a$ を使ってください。それにしても計算量が半端ないですね。これ 1 問で 1 時間はかかりそうです。本番では (2) が半分くらい解けたら，いったん次の問題に移るほうが得策です。問題全部をざっと見て時間配分を決めるのも立派な受験対策です。頑張ってくださいね。何か質問がありましたら，X のコメント欄に書いてください。