数学・全国大学入試めぐり第 23 回

東北大学・理系

2 月 26 日（水）実施（150 分・600 点）

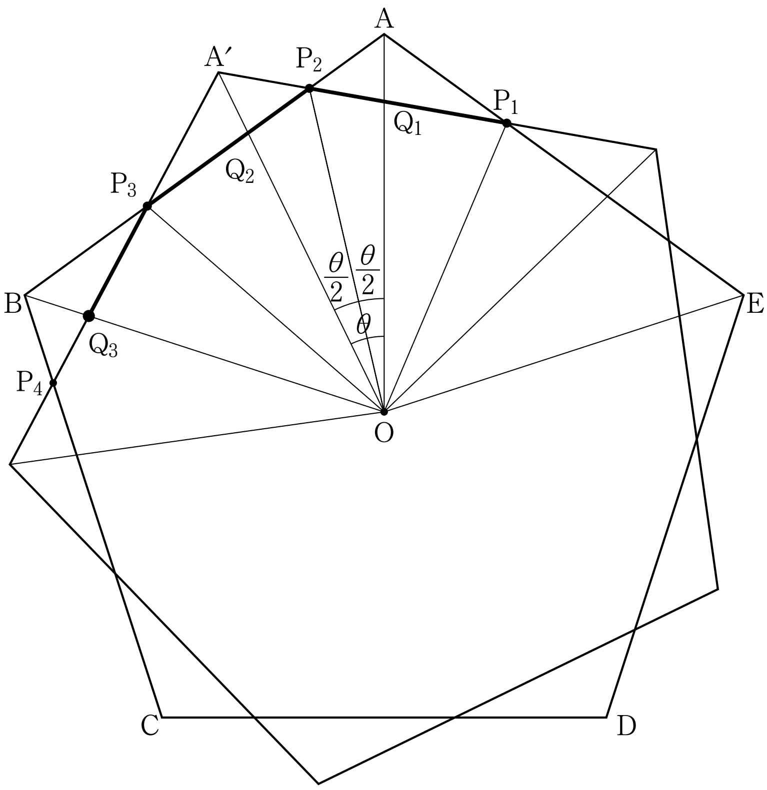
数学 I・数学 II・数学 III・数学 A・数学 B（「数列」）・数学 C（「ベクトル」「平面上の曲線と複素数平面」）❶❷❸❹❺❻

文系（学部別入試）は 90 分 150 点（上の範囲から数学 III を除く）❶❷❼❽

❻ 1 辺の長さが 1 の正五角形を K とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) K の対角線の長さを求めよ。

(2) K の周で囲まれた図形を P とする。また，P を K の外接円の中心の周りに角 θ だけ回転して得られる図形を P_θ とする。P と P_θ の共通部分の周の長さを ℓ_θ とする。θ が $0° < \theta < 72°$ の範囲を動くとき，ℓ_θ の最小値が $2\sqrt{5}$ であることを示せ。



まず，$\triangle \mathrm{OAQ_2} \equiv \triangle \mathrm{OA'Q_1}$ を示す。

$\mathrm{OA} = \mathrm{OA'}$（正五角形の外接円の半径）

$\angle \mathrm{OAQ_2} = \angle \mathrm{AA'Q_1} = 54°$（正五角形のひとつの内角の半分）

$\angle \mathrm{AOQ_2} = \angle \mathrm{A'OQ_1}$（共通）

よって，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle \mathrm{OAQ_2} \equiv \triangle \mathrm{OA'Q_1}$

したがって，$\mathrm{OQ_1} = \mathrm{OQ_2}$

次に，$\triangle \mathrm{AP_2Q_1} \equiv \triangle \mathrm{A'P_2Q_2}$ を示す。

$\mathrm{OA} = \mathrm{OA'}$（正五角形の外接円の半径）

$\mathrm{OQ_1} = \mathrm{OQ_2}$

よって　$\mathrm{AQ_1} = \mathrm{A'Q_2}$

$\angle \mathrm{P_2AQ_1} = \angle \mathrm{P_2A'Q_2} = 54°$（正五角形のひとつの内角の半分）

$\angle \mathrm{AP_2Q_1} = \angle \mathrm{A'P_2Q_2}$（対頂角）

よって，2 組の角が等しいから，残り 1 組の角も等しい。

$\angle \mathrm{AQ_1P_2} = \angle \mathrm{A'Q_2P_2}$

よって，1 組の辺と両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle \mathrm{AP_2Q_1} \equiv \triangle \mathrm{A'P_2Q_2}$

したがって　　$\mathrm{P_2Q_1} = \mathrm{P_2Q_2}$

また 3 組の辺がそれぞれ等しいから

$\triangle \mathrm{OAP_2} = \mathrm{OA'P_2}$

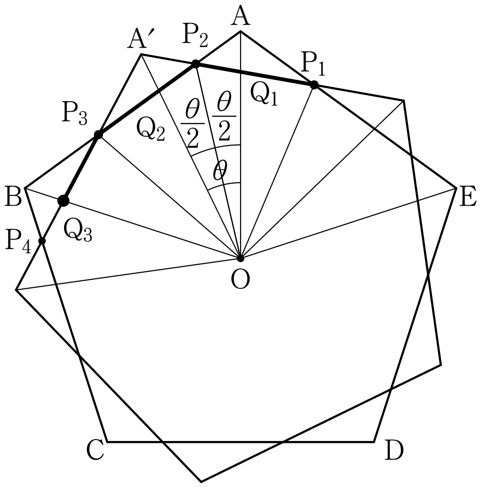
したがって

$\angle \mathrm{AOP_2} = \angle \mathrm{A'OP_2} = \dfrac{\theta}{2}$

また同様にして

$\mathrm{Q_2P_3} = \mathrm{P_3Q_3}$

したがって $\ell_\theta = 10 \times \{\mathrm{AB} - (\mathrm{AP_2} + \mathrm{P_3B})\}$

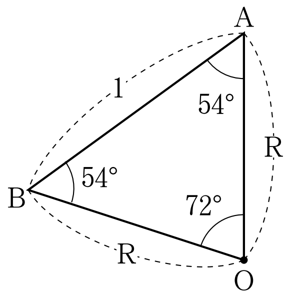


まず，$\mathrm{AP_2}$ を求めよう。$\triangle \mathrm{OAP_2}$ で正弦定理を用いると

$$\frac{\mathrm{AP_2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}} = \frac{\mathrm{OA}}{\sin\angle \mathrm{OP_2A}} \cdots\cdots ①$$

ここで，まず OA（正五角形の外接円の半径）を求めよう。

$\triangle \mathrm{AOB}$ は



図のような二等辺三角形であるから正弦定理により

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle \mathrm{AOB}} = \frac{\mathrm{AO}}{\sin\angle \mathrm{OBA}}$$

OA=R とおき，$\mathrm{AB} = 1$, $\angle \mathrm{AOB} = 72°$, $\angle \mathrm{OBA} = 54°$ を代入すると

$$\frac{1}{\sin 72°} = \frac{\mathrm{R}}{\sin 54°}$$

よって

$$\begin{aligned} \mathrm{R} &= \frac{\sin 54°}{\sin 72°} \\ &= \frac{\sin(90° - 36°)}{2\sin 36° \cos 36°} \\ &= \frac{\cos 36°}{2\sin 36° \cos 36°} \\ &= \frac{1}{2\sin 36°} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} \angle \mathrm{OP_2A} &= 180° - \angle \mathrm{AOP_2} - \angle \mathrm{OAP_2} \\ &= 180° - \frac{\theta}{2} - 54° \\ &= 126° - \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

したがって ① より

$$\frac{\mathrm{AP_2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}} = \frac{\mathrm{R}}{\sin\left(126° - \dfrac{\theta}{2}\right)}$$

よって

$$\begin{aligned} \mathrm{AP_2} &= \mathrm{R} \cdot \frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sin\left(126° - \dfrac{\theta}{2}\right)} \\ &= \mathrm{R} \cdot \frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sin\left(90° + 36° - \dfrac{\theta}{2}\right)} \\ &= \mathrm{R} \cdot \frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\cos\left(36° - \dfrac{\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

（まだここでは R のままにしておく）

同様にして $\mathrm{P_3B}$ を求めよう。$\triangle \mathrm{OBP_3}$ で正弦定理を用いる。

$\mathrm{OB} = \mathrm{R}$, $\angle \mathrm{BOP_3} = \dfrac{72° - \theta}{2} = 36° - \dfrac{\theta}{2}$

$$\begin{aligned} \angle \mathrm{OP_3B} &= 180° - \angle \mathrm{BOP_3} - \angle \mathrm{OBP_3} \\ &= 180° - \frac{72° - \theta}{2} - 54° \\ &= 180° - \left(36° - \frac{\theta}{2}\right) - 54° \\ &= 90 + \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

よって正弦定理より

$$\frac{\mathrm{P_3B}}{\sin\angle \mathrm{BOP_3}} = \frac{\mathrm{OB}}{\sin\angle \mathrm{OP_3B}} \cdots\cdots ②$$

$$\frac{\mathrm{P_3B}}{\sin\left(36° - \dfrac{\theta}{2}\right)} = \frac{\mathrm{R}}{\sin\left(90° + \dfrac{\theta}{2}\right)}$$

したがって

$$\begin{aligned} \mathrm{P_3B} &= \mathrm{R} \cdot \frac{\sin\left(36° - \dfrac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(90° + \dfrac{\theta}{2}\right)} \\ &= \mathrm{R} \cdot \frac{\sin\left(36° - \dfrac{\theta}{2}\right)}{\cos\dfrac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

よって

$\mathrm{P_2P_3} = \mathrm{AB} - (\mathrm{AP_2} + \mathrm{P_3B}) = 1 - (\mathrm{AP_2} + \mathrm{P_3B})$

であり，

$$\ell_\theta = 10 \times \mathrm{P_2P_3}$$

であるから，$\mathrm{AP_2} + \mathrm{P_3B}$ が最大になるとき，ℓ_θ は最小となる。

すると，

$$\mathrm{AP_2} + \mathrm{P_3B} = \frac{\mathrm{R}\sin\dfrac{\theta}{2}}{\cos\left(36° - \dfrac{\theta}{2}\right)} + \frac{\mathrm{R}\sin\left(36° - \dfrac{\theta}{2}\right)}{\cos\dfrac{\theta}{2}}$$

$$= \mathrm{R}\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\cos\left(36^\circ-\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(36^\circ-\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(36^\circ-\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}}$$
$$= \mathrm{R}\cdot\frac{\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\sin(72^\circ-\theta)}{\frac{1}{2}\{\cos 36^\circ+\cos(36^\circ-\theta)\}}$$
$$= \mathrm{R}\cdot\frac{\sin 36^\circ\cos(\theta-36^\circ)}{\frac{1}{2}\{\cos 36^\circ+\cos(36^\circ-\theta)\}}$$
$$= \frac{1}{2\sin 36^\circ}\cdot\frac{2\sin 36^\circ\cos(\theta-36^\circ)}{\cos 36^\circ+\cos(36^\circ-\theta)}$$
$$= \frac{\cos(\theta-36^\circ)}{\cos 36^\circ+\cos(36^\circ-\theta)}$$
$$= 1-\frac{\cos 36^\circ}{\cos 36^\circ+\cos(36^\circ-\theta)}$$

これが最大になるのは
$\dfrac{\cos 36^\circ}{\cos 36^\circ+\cos(36^\circ-\theta)}$
が最小になるときであり，それは $\cos(36^\circ-\theta)$ が最大になるときであるから，

$$36^\circ-\theta=0^\circ$$

すなわち

$$\boldsymbol{\theta=36^\circ}$$

のときである。

このとき，

$$\mathrm{AP_2}+\mathrm{P_3B}=\frac{1}{\cos 36^\circ+1}$$

ここで (1) の $\mathrm{AC}=x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ より，$\triangle\mathrm{ACD}$ で余弦定理を用いると

$$\cos 36^\circ=\frac{x^2+x^2-1^2}{2\cdot x\cdot x}=\frac{2x^2-1}{2x^2}$$

したがって，

$$\mathrm{AP_2}+\mathrm{P_3B}=\frac{1}{\frac{2x^2-1}{2x^2}+1}=\frac{2x^2}{(2x^2-1)+2x^2}$$
$$=\frac{2x^2}{4x^2-1}$$

ここで

$$x^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

したがって

$$\mathrm{AP_2}+\mathrm{P_3B}=\frac{2\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}}{4\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}-1}=\frac{3+\sqrt{5}}{2(3+\sqrt{5})-1}$$
$$=\frac{3+\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}}=\frac{(3+\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}{(5+2\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}$$
$$=\frac{15-6\sqrt{5}+5\sqrt{5}-10}{25-20}$$
$$=\frac{5-\sqrt{5}}{5}$$

よって，

$$\ell_\theta=10\times\left(1-\frac{5-\sqrt{5}}{5}\right)=10\times\frac{5-5+\sqrt{5}}{5}$$
$$=10\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\boldsymbol{2\sqrt{5}}$$