2025年 東京理科大学 理学部・数学科

5　a を正の定数とする。このとき x の関数 $f(x)=ax^2$ を考える。座標平面において，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における法線を ℓ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。

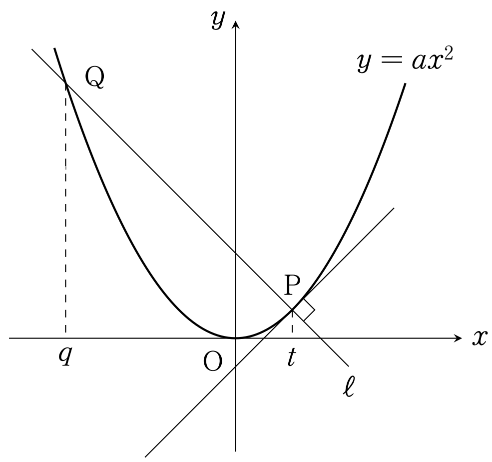
(2) $t>0$ のとき，直線 ℓ と曲線 $y=f(x)$ の 2 つの共有点のうち，点 P と異なる共有点を Q とする。点 Q の x 座標を q とおく。点 P が $t>0$ の範囲で動くとき，q が最大となるときの点 Q の y 座標を求めよ。また，q の最大値を与える t の値を求めよ。

(3) k を実数とし，直線 $y=k$ と ℓ の交点を R とおく。また点 R の x 座標を r とする。点 P が $t\geqq 0$ の範囲で動くときの r の最小値を k と a を用いて表せ。

(4) 不等式 $\dfrac{2}{a}\geqq y\geqq f(x)$ の表す領域を D とする。点 P が $t\geqq 0$ の範囲で動くとき，領域 D のなかで直線 ℓ が通る部分の面積 $S(a)$ を求めよ。

(5) a 変数 u の関数 $a=ue^{-3u}$ $(u>0)$ であるとき，(4) で求めた面積 $S(a)$ が最小となる u と，そのときの $S(a)$ の値を求めよ。ただし e は自然対数の底とする。

(1)　$t\geqq 0$ のとき　$\ell:\boldsymbol{2aty=-x+2a^2t^3+t}$



(2)　$2at\cdot ax^2=-x+2a^2t^3+t$ を x について解く。

$$2a^2tx^2+x-2a^2t^3-t=0$$

これは $x=t$ を解にもつから

$$(x-t)(2a^2tx+2a^2t^2+1)=0$$

よって　$x=t,\ -\dfrac{2a^2t^2+1}{2a^2t}\left(=-t-\dfrac{1}{2a^2t}\right)$

また，Q の y 座標は

$$y=a\left(-t-\frac{1}{2a^2t}\right)^2=a\left(t^2+2t\cdot\frac{1}{2a^2t}+\frac{1}{4a^4t^2}\right)$$
$$=a\left(t^2+2t\cdot\frac{1}{2a^2t}+\frac{1}{4a^4t^2}\right)=at^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{4a^3t^2}$$

したがって，$\mathrm{Q}\left(-t-\dfrac{1}{2a^2t},\quad at^2+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{4a^3t^2}\right)$

ここで $q=-t-\dfrac{1}{2a^2t}$

t，$\dfrac{1}{2a^2t}$ はどちらも正だから，相加相乗平均の不等式により

$$-q=t+\frac{1}{2a^2t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{2a^2t}}=\frac{\sqrt{2}}{a}$$

等号成立は

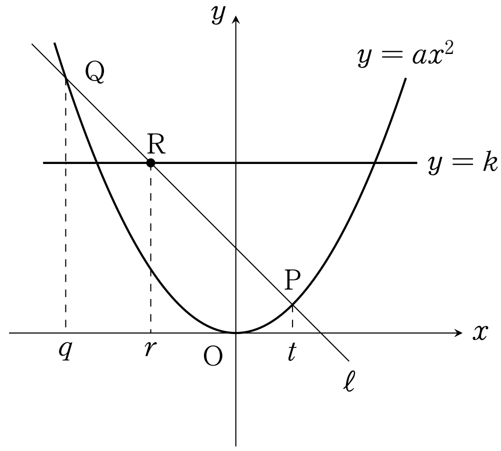
$$t=\frac{1}{2a^2t}\ \text{つまり}\ t=\frac{1}{\sqrt{2}a}$$

のときである。よって $-q$ の最小値は　$\dfrac{\sqrt{2}}{a}$

$-q\geqq\dfrac{\sqrt{2}}{a}$　すなわち　$q\leqq-\dfrac{\sqrt{2}}{a}$ であるから q の最大値は $\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{2}}{a}}$

このとき，点Qの y 座標は　$a\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{a}\right)^2=\boldsymbol{\dfrac{2}{a}}$，　また t の値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}a}}$

(3)　$t \geqq 0$ のとき　$\ell: 2aty=-x+2a^2+t^3+t$



$y=k$ を代入して

$2akt=-x+2a^2t^3+t$

これを x について解くと

$x=2a^2t^3+(1-2ak)t$

$x=r$ とすると

$r=2a^2t^3+(1-2ak)t$ ($=r(t)$ とおく)

$r'(t)=6a^2t^2+(1-2ak)$

• $1-2ak \geqq 0$　つまり　$0<k \leqq \dfrac{1}{2a}$ のとき

常に $r' \geqq 0$

よって $r(t)$ は単調に増加する。　$r(0)=0$ であるから $r(t) \geqq 0$

よって，r の最小値は 0

• $1-2ak \leqq 0$　つまり　$k \geqq \dfrac{1}{2a}$ のとき

$r(t)=0$ のとき $t=\pm\dfrac{\sqrt{2ak-1}}{\sqrt{6}a}$　$t \geqq 0$ より $t=\dfrac{\sqrt{2ak-1}}{\sqrt{6}a}$ ($=\alpha$ とおく)

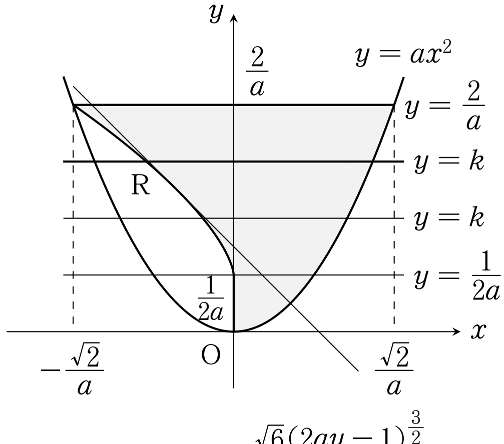
t	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$r'(t)$		$-$	0	$+$
$r(t)$		↘		↗

よって，r は $t=\alpha$ で最小値

$$
\begin{aligned}
r(\alpha)&=2a^2\alpha^3+(1-2ak)\alpha=\alpha\{2a^2\alpha^2-(2ak-1)\}\\
&=\alpha\left\{2a^2\left(\frac{2ak-1}{6a^2}\right)-(2ak-1)\right\}=\alpha\left\{\frac{2ak-1}{3}-(2ak-1)\right\}\\
&=-\frac{2}{3}\alpha(2ak-1)=-\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{2ak-1}}{\sqrt{6}a}(2ak-1)\\
&=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{6}(2ak-1)^{\frac{3}{2}}}{9a}}
\end{aligned}
$$

をとる。[これ，本番中に冷静に計算できるのだろうか？ 信じられん。]

(4) (3) の結果から，領域 D のなかで直線 ℓ が通る部分は次の図の網目部分である。[**$\boldsymbol{y}$ 軸の右側と左側に分けて $\boldsymbol{k}$ または $\boldsymbol{y}$ で積分します。**]



曲線部分は $x=-\dfrac{\sqrt{6}(2ay-1)^{\frac{3}{2}}}{9a}$

したがって，

$$
\begin{aligned}
&S(a)=\int_0^{\frac{2}{a}} r(t)dk\\
&=\int_0^{\frac{2}{a}}\sqrt{\frac{k}{a}}dk-\int_{\frac{1}{2a}}^{\frac{2}{a}}\left\{\left(-\frac{\sqrt{6}(2ak-1)^{\frac{3}{2}}}{9a}\right)\right\}dk
\end{aligned}
$$

[k を y とおいて，y で積分してもよい。曲線部分が x の式で表しにくいので y で積分しよう。てゆうか，これ，本番中に冷静に計算できるんでしょうか？ 出題教官の考えが知りたいですね。]

粛々と計算していきましょう。

• 第 1 の積分について

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{2}{3}\left[k^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{2}{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{a\sqrt{a}}=\frac{4\sqrt{2}}{3a^2}$$

• 第 2 の積分について

$$-\int_{\frac{1}{2a}}^{\frac{2}{a}}\left(-\frac{\sqrt{6}(2ak-1)^{\frac{3}{2}}}{9a}\right)dk=\int_{\frac{1}{2a}}^{\frac{2}{a}}\frac{\sqrt{6}(2ak-1)^{\frac{3}{2}}}{9a}dk=\frac{\sqrt{6}}{9a}\cdot\frac{1}{2a}\cdot\frac{2}{5}\left[(2ak-1)^{\frac{5}{2}}\right]_{\frac{1}{2a}}^{\frac{2}{a}}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{45a^2}\left\{(2a\cdot\frac{2}{a}-1)^{\frac{5}{2}}-(2a\cdot\frac{1}{2a}-1)^{\frac{5}{2}}\right\}=\frac{\sqrt{6}}{45a^2}\left(3^{\frac{5}{2}}-0\right)=\frac{\sqrt{6}}{45a^2}\cdot 9\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{2}}{5a^2}$$

したがって，答えは

$$\frac{4\sqrt{2}}{3a^2}+\frac{3\sqrt{2}}{5a^2}=\boldsymbol{\frac{29\sqrt{2}}{15a^2}}$$

［積分計算はそれほど難しくはないのですが，何せ制限時間のある入試本番で冷静に計算を進めることができるか疑問ですね。］

(5) $a=ue^{-3u}$ $(u>0)$ であるとき

$$S(a)=\frac{29\sqrt{2}}{15(ue^{-3u})^2}$$

ここで，$(ue^{-3u})^2=T(u)$ とおくと

$$T'(u)=2\cdot ue^{-3u}\cdot(ue^{-3u})'=2\cdot ue^{-3u}\cdot(e^{-3u}-u\cdot 3e^{-3u})$$

$$=2ue^{-3u}\cdot e^{-3u}(1-3u)=2ue^{-6u}(1-3u)$$

$u>0$ であるから，$T'(u)=0$ のとき，$u=\frac{1}{3}$

よって，次の増減表を得る。

u	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$T'(u)$		$+$	0	$-$
$T(u)$		$\nearrow$		$\searrow$

したがって，$T(u)$ は $u=\frac{1}{3}$ で最大となる。このとき，$S(a)$ は最小となる。
ゆえに，求める u と $S(a)$ の値は

$$\boldsymbol{u=\frac{1}{3}},\qquad \boldsymbol{S(a)}=\frac{29\sqrt{2}}{15}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\cdot e^{-1}\right)^2}=\frac{29\sqrt{2}}{15}\cdot 9e^2=\boldsymbol{\frac{87\sqrt{2}}{5}}e^2$$

［やれやれ，という感じです。最近の問題は見てませんが，この 5 問セットは強烈です。息をつく暇もありません。受験した方，お疲れさまでした。］