数学・全国大学入試めぐり第46回

京都大学　2月25日（火）

理系150分200点他，文系120分150点他

理系：数学 I，数学 II，数学 III，数学A，数学B（「数列」），数学C（「ベクトル」，「平面上の曲線と複素数平面」）

文系：数学 I，数学 II，数学A，数学B（「数列」），数学C（「ベクトル」）

理系　❶❷❸❹❺❻　文系　❼❽❾❿⓫

❷　（35点）

正の整数 x, y, z を用いて

$$N = 9z^2 = x^6 + y^4$$

と表される正の整数 N の最小値を求めよ．

悲しいかな，私のような文系上がりの凡人にこの整数方程式を解くことは不可能です。しかし，問題文をよく読んで見ると，方程式を解け，とは言ってないですね。正の整数 N の最小値を求めよ，と言っているのです。ということは，

z に1から順に正の整数を代入して，最初に成立した値を最小値としてよい。

ということなので，少し簡単になります。とはいうものの，右辺は x^6 とか y^4 なので相当大きな整数になりそうです。1，2，3，… を順に代入していくのは無謀かもしれません。そこで，

$9z^2$ の9に注目して，$x^6 + y^4$ が9の倍数であることに注意する。

のはどうでしょうか？ 6乗や4乗して9の倍数になるには，6乗や4乗する前は3の倍数でなければなりません。そこで，9の倍数ではなく3の倍数について考えるのがよさそうです。

整数の累乗を3で割った余りは循環する。

という事実はよく知られています。

x^6 を3で割った余りを考えます。

$1^6, 2^6, 3^6, 4^6, \cdots$ を3で割った余りを考えます。

x	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
x^6	1^6	2^6	3^6	4^6	5^6	6^6	$\cdots$
	1	64	729	4096	15625	46656	$\cdots$
3で割った余り	1	1	0	1	1	0	$\cdots$

というふうに，6乗数を3で割った余りは，1，1，0の3つの数を繰り返します。

4乗数も同じように考えます。

y	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
y^4	1^4	2^4	3^4	4^4	5^4	6^4	$\cdots$
	1	16	81	256	625	1296	$\cdots$
3で割った余り	1	1	0	1	1	0	$\cdots$

4乗数も6乗数と同様に，3で割った余りは，1，1，0の3つの数を繰り返すことがわかります。

> 2つの整数を加えたとき3の倍数になるのは
> ① 2つとも3の倍数（＝3で割った余りが0）
> ② 一つは3で割ると1余る数，もう一つは3で割ると2余る数

という事実に基づくと，6乗数と4乗数を足したとき3の倍数になるのは，両方とも3の倍数のときであることがわかります。

したがって，6乗，4乗して3の倍数になるのは，もともと3の倍数のときであるから，

x, y はどちらも3の倍数

ということがわかります。そこで

$x = 3x_1$, $y = 3y_1$（x_1, y_1は正の整数）とおくと，与えられた等式は

$$N = 9z^2 = (3x_1)^6 + (3y_1)^4$$
$$= 3^6{x_1}^6 + 3^4{y_1}^4$$

両辺を $9(=3^2)$ で割ると

$$z^2 = 3^4{x_1}^6 + 3^2{y_1}^4$$

右辺は3の倍数だから，左辺も3の倍数である。したがって，z^2 は3の倍数。2乗する前も3の倍数だから，z は3の倍数になる。したがって，$z = 3z_1$（z_1は正の整数）と置くと，

$$(3z_1)^2 = 3^4{x_1}^6 + 3^2{y_1}^4$$
$$3^2{z_1}^2 = 3^4{x_1}^6 + 3^2{y_1}^4$$

両辺を 3^2 で割って

$${z_1}^2 = 3^2{x_1}^6 + {y_1}^4$$
$${z_1}^2 = 9{x_1}^6 + {y_1}^4$$

これを満たす最小の正の整数 z_1 を見つけよう。z_1 は平方数であり，右辺 $\geqq 9+1=10$ であるから，${z_1}^2 \geqq 10$.

10以上の平方数は順に，$4^2=16$, $5^2=25$, $6^2=36$, $\cdots$.

- ${z_1}^2 = 16$ のとき　　　　$16 = 9{x_1}^6 + {y_1}^4$

これを満たす正の整数 x_1, y_1 は存在しない。

- ${z_1}^2 = 25$ のとき　　　　$25 = 9{x_1}^6 + {y_1}^4$

$25 = 9 + 16$ であるから $x_1{}^6 = 1,\ y_1{}^4 = 16$ すなわち $x_1 = 1,\ y_1 = 2$ はこれを満たす。

よって，$x = 3,\ y = 6$，また　$z = 3z_1 = 3 \cdot 5 = 15$

三平方の定理でよく見た式　　$\mathbf{3^2 + 4^2 = 5^2}$

したがって，N の最小値は　$9z^2 = 9 \cdot 15^2 = 9 \times 225 = \mathbf{2025}$

✍**注**　あれれ，京大も年号にちなんだ出題をするのですね。初めてかも。これはこれでめでたい。かなり長くなったが，やってることは**3 の倍数の判別とおき換え**だけとわかります。答案としては，各予備校が発表されてますのでそちらをご覧ください。上みたいにくだくだ書く必要はありません。ちなみに，z に 1 から順に代入した場合，15 で正解にたどり着くことになります。$x,\ y$ も求めないといけないので時間的に無理かもしれませんね。　（以上）