

数学・全国大学入試めぐり第46回

京都大学 2月25日(火)

理系 150分 200点他, 文系 120分 150点他

理系: 数学I, 数学II, 数学III, 数学A, 数学B(「数列」), 数学C(「ベクトル」, 「平面上の曲線と複素数平面」)

文系: 数学I, 数学II, 数学A, 数学B(「数列」), 数学C(「ベクトル」)

理系 **1 2 3 4 5 6** 文系 **7 8 9 10 11**

7 問2 $n^4 + 6n^2 + 23$ が $n^2 + n + 3$ で割り切れるような正の整数 n をすべて求めよ。

理系の整数問題とは違って倍数で処理するのは不可能です。さて、どうしましょう？実際に、 $n = 1, 2, \dots$ を代入して実験するという方法があります。が、実際やってみると、 $n = 1, 2$ のときは上手くいきます。(読者は鉛筆を動かして計算してみてください。) しかし、3以上の n に関しての情報はまったく手に入りません。

そこで、問題文では「割り切れる」と言っているのですから、実際に割ってみるというのが、次に取るべき方針だと思います。

$$\begin{array}{r} n^2 \quad -n \quad +4 \\ \hline n^2 + n + 3 \big) n^4 \quad +6n^2 \quad \quad \quad +23 \\ \hline n^4 + n^3 + 3n^2 \\ \hline -n^3 + 3n^2 \\ \hline -n^3 \quad -n^2 \quad -3n \\ \hline 4n^2 \quad +3n \quad +23 \\ \hline 4n^2 \quad +4n \quad +12 \\ \hline -n \quad +11 \end{array}$$

よって、商は $n^2 - n + 4$ 、余りは $-n + 11$

したがって、次のように表すことができます。

$$n^4 + 6n^2 + 23 = (n^2 + n + 3)(n^2 - n + 4) - n + 11 \cdots \cdots ①$$

整式 $p(x)$ を整式 $a(x)$ で割ったときの商を $q(x)$ 、余りを $r(x)$ とすると

$$p(x) = a(x)q(x) + r(x)$$

と表すことができる。

n は正の整数ですので、 $n^2 + n + 3 \neq 0$ は明らかです。そこで①の両辺を $n^2 + n + 3$ で割ってみましょう。

$$\frac{n^4 + 6n^2 + 23}{n^2 + n + 3} = n^2 - n + 4 + \frac{-n + 11}{n^2 + n + 3} \cdots \cdots ②$$

②の左辺は条件から(正の)整数になります。右辺の $n^2 - n + 4$ は整数です。したがって、

$\frac{-n+11}{n^2+n+3}$ も整数になるはずです。

ということは $-n+11$ が n^2+n+3 で割り切れるということになります。そこで、

$$\frac{-n+11}{n^2+n+3} = k \quad (k \text{ は整数})$$

とおいてみます。分母を払って

$$-n+11 = k(n^2+n+3)$$

n で整理すると

$$-n+11 = k(n^2+n+3)$$

$$k(n^2+n+3) = -n+11$$

$$kn^2 + kn + 3k + n - 11 = 0$$

$$kn^2 + (k+1)n + 3k - 11 = 0 \cdots \cdots ③$$

さて、ここからが問題です。この n の 2 次方程式をどのように処理すべきなのでしょう。因数分解はできそうにもないので、解の公式で解いてみるのも一つの方法です。というか、それ以外にできることはありません。そこで、一気に解の公式に飛びついてしまうと、まず解の公式の $\sqrt{\quad}$ の中を先に計算しましょう。そうです。判別式です。 n は正の整数である以前に実数です。したがって、(見かけ上) n の 2 次方程式が実数解をもつ条件を求めてみようという作戦です。

[1] n^2 の係数 k が 0 のとき、③は 2 次方程式ではないので、判別式は利用できません。そこで、実際に $k=0$ を代入してみます。すると、

$$n-11=0$$

したがって

$$n=11$$

[2] $k \neq 0$ のとき、③は 2 次方程式であり、 n は実数なので、③の判別式を D とすると

$$D \geq 0$$

よって

$$\begin{aligned} D &= (k+1)^2 - 4 \cdot k \cdot (3k-11) \\ &= (k^2 + 2k + 1) - 12k^2 + 44k \\ &= -11k^2 + 46k + 1 \geq 0 \end{aligned}$$

よって、

$$11k^2 - 46k - 1 \leq 0 \cdots \cdots ④$$

この k の 2 次不等式を解くのですが、 k は整数なので ④ を満たす整数 k を求めればいいのです。解の公式を使うと根号内がお祭りになりますので、ここでは $y = 11x^2 - 46x - 1$ のグラフと、 k は整数という条件を使って整数 k を求めてみましょう。

放物線 $y = 11x^2 - 46x - 1$ の軸の方程式は

$$x = -\frac{-46}{2 \cdot 11} = \frac{23}{11}$$

放物線はその軸 $x = \frac{23}{11}$ に関して対称ですから

$$x = 2 \times \frac{23}{11} = \frac{46}{11} (= 4.1\cdots) \text{ のときも } y = -1$$

$x = 0$ のとき $y = -1$, また $x = -1$ のとき

$$y = 11 + 46 - 1 > 0, \quad x = 5 \text{ のとき } y = 11 \cdot 25$$

$$-46 \cdot 5 - 1 = 275 - 203 - 1 > 0 \text{ であることから,}$$

不等式 ④ を満たす整数 k の値は, $k \neq 0$ に注意すると

$$k = 1, 2, 3, 4$$

よって, ③ の n の 2 次方程式を解くだけです。ちょ

っと面倒ですが, 最後のステップですのでケアレスミス

をしないよう気合いを入れましょう。

以下, n は正の整数とする。

- $k = 1$ のとき, ③ は

$$n^2 + 2n - 8 = 0$$

$$(n - 2)(n + 4) = 0$$

よって, $n = 2$

- $k = 2$ のとき, ③ は

$$2n^2 + 3n - 5 = 0$$

$$(n - 1)(2n + 5) = 0$$

よって, $n = 1$

- $k = 3$ のとき, ③ は

$$3n^2 + 4n - 2 = 0$$

これを満たす正の整数 n は存在しない。

- $k = 4$ のとき, ③ は

$$4^2 + 5n + 1 = 0$$

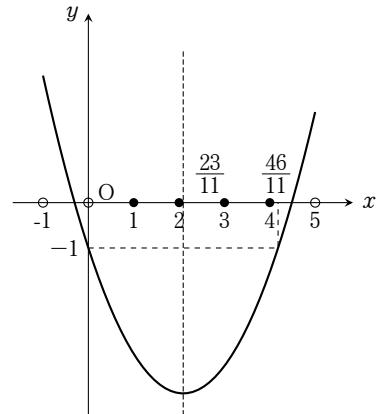
$$(4n + 1)(n + 1) = 0$$

これを満たす正の整数 n は存在しない。

以上, [1], [2] から, 答えは

$$n = 1, 2, 11$$

※注 $n = 11$ という値が出てくるのが面白い問題です。エレガントに解きたいのはやまやまな
れど, 田舎の凡人が解くとこんなことになります。どなたかの参考になれば幸いです。



グラフはかなりデフォルメしています。