

$\frac{-n+11}{n^2+n+3}$ も整数になるはずですが。

ということは $-n+11$ が n^2+n+3 で割り切れるということになります。そこで、

$$\frac{-n+11}{n^2+n+3} = k \quad (k \text{ は整数})$$

とおいてみます。分母を払って

$$-n+11 = k(n^2+n+3)$$

n で整理すると

$$-n+11 = k(n^2+n+3)$$

$$k(n^2+n+3) = -n+11$$

$$kn^2 + kn + 3k + n - 11 = 0$$

$$kn^2 + (k+1)n + 3k - 11 = 0 \dots\dots \textcircled{3}$$

さて、ここからが問題です。この n の 2 次方程式をどのように処理すべきなのでしょう。因数分解はできそうにもないので、解の公式で解いてみるのも一つの方法です。というか、それ以外にできることはありません。そこで、一気に解の公式に飛びつくのではなく、まず解の公式の $\sqrt{\quad}$ の中を先に計算しましょう。そうです。判別式です。 n は正の整数である以前に実数です。したがって、(見かけ上) n の 2 次方程式が実数解をもつ条件を求めてみようという作戦です。

[1] n^2 の係数 k が 0 のとき、 $\textcircled{3}$ は 2 次方程式ではないので、判別式は利用できません。そこで、実際に $k=0$ を代入してみます。すると、

$$n - 11 = 0$$

したがって

$$n = 11$$

[2] $k \neq 0$ のとき、 $\textcircled{3}$ は 2 次方程式であり、 n は実数なので、 $\textcircled{3}$ の判別式を D とすると

$$D \geq 0$$

よって

$$\begin{aligned} D &= (k+1)^2 - 4 \cdot k \cdot (3k-11) \\ &= (k^2 + 2k + 1) - 12k^2 + 44k \\ &= -11k^2 + 46k + 1 \geq 0 \end{aligned}$$

よって、

$$11k^2 - 46k - 1 \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

この k の 2 次不等式を解くのですが、 k は整数なので $\textcircled{4}$ を満たす整数 k を求めればいいのです。解の公式を使うと根号内がお祭りになりますので、ここでは $y = 11x^2 - 46x - 1$ のグラフと、 k は整数という条件を使って整数 k を求めてみましょう。

放物線 $y = 11x^2 - 46x - 1$ の軸の方程式は

$$x = -\frac{-46}{2 \cdot 11} = \frac{23}{11}$$

放物線はその軸 $x = \frac{23}{11}$ に関して対称ですから

$$x = 2 \times \frac{23}{11} = \frac{46}{11} (= 4.1\cdots) \text{ のときも } y = -1$$

$x = 0$ のとき $y = -1$, また $x = -1$ のとき

$$y = 11 + 46 - 1 > 0, \quad x = 5 \text{ のとき } y = 11 \cdot 25 - 46 \cdot 5 - 1 = 275 - 203 - 1 > 0 \text{ であることから,}$$

不等式 ④ を満たす整数 k の値は, $k \neq 0$ に注意すると

$$k = 1, 2, 3, 4$$

よって, ③ の n の 2 次方程式を解くだけです。ちょっと面倒ですが, 最後のステップですのでケアレスミスをしないう気合いを入れましょう。

以下, n は正の整数とする。

- $k = 1$ のとき, ③ は

$$n^2 + 2n - 8 = 0$$

$$(n - 2)(n + 4) = 0$$

よって, $n = 2$

- $k = 2$ のとき, ③ は

$$2n^2 + 3n - 5 = 0$$

$$(n - 1)(2n + 5) = 0$$

よって, $n = 1$

- $k = 3$ のとき, ③ は

$$3n^2 + 4n - 2 = 0$$

これを満たす正の整数 n は存在しない。

- $k = 4$ のとき, ③ は

$$4^2 + 5n + 1 = 0$$

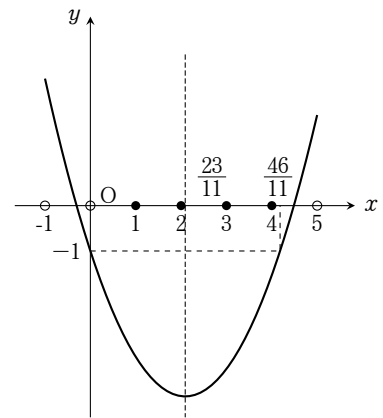
$$(4n + 1)(n + 1) = 0$$

これを満たす正の整数 n は存在しない。

以上, [1], [2] から, 答えは

$$n = 1, 2, 11$$

⇒注 $n = 11$ という値が出てくるのが面白い問題です。エレガントに解きたいのはやまやまなれど, 田舎の凡人が解くとこんなことになります。どなたかの参考になれば幸いです。



グラフはかなりデフォルメしています。