

数学・全国大学入試めぐり第 24 回

東京科学大学 医学科・歯学科

2月 25 日(火)実施(90 分・120 点)

数学 I・数学 II・数学 III・数学 A(「図形の性質」「場合の数と確率」)・数学 B(「数列」)・数学 C(「ベクトル」)

「平面上の曲線と複素数平面」)

歯学科 ① ② ④

3 a を 1 より大きい実数とし, xy 平面上の曲線 $C_1 : y = a^x$ および曲線 $C_2 : y = \log_a x$ について考える。原点を O とし, C_1 上に点 P, C_2 上に点 Q をとる。このとき, 以下の各問い合わせよ。

(1) O を通る傾き k の直線が C_1 に接するとき, a の値を k を用いて表せ。また, 接点の座標を a を用いて表せ。

(2) O を通る直線が C_2 に接するとき, 接点の座標を a を用いて表せ。

(3) $\triangle OPQ$ が正三角形となるような P, Q の組の個数を, a の値で場合分けして求めよ。

グラフは次ページです。

(1), (2) はいたって普通の問題ですが, (3) で豹変します。次ページの $a = 1.05 \sim 4$ のグラフを見ればわかりますが, たとえば, $a = 1.05$ の場合, $y = a^x$ のグラフと $y = (\tan 15^\circ)x$ のグラフは無限遠で交わり, さらに $y = \log_a x$ のグラフと $y = (\tan 15^\circ)x$ のグラフも遙かかなたで交わります。私の場合, Tex でグラフを描いて初めて気がつきました。

私や普通の受験生が思い付くのは, $a = 1.3 \sim 1.4$ のグラフでしょう。見えているところだけで考えると, 正三角形は 1 個しか見つかりません。無限遠で交わるということに気づいて初めて正解が得られわけです。なかなか洒落た問題だと思われます。

