この解答は一個人による試みですので，参考程度にご利用ください。間違いがたくさんあると思いますが，考え方はたいてい合っていると思います(笑) 問題そのものは https://suugaku.jp/kako/gihuyakka/ を参照。

岐阜薬科大 2016

[1] $x^3+ax^2+bx+\frac{b}{k}=0 \cdots ①$

は3つの解 p, p, q をもつ。

解と係数の関係から

$$\begin{cases} p+p+q=-a \cdots ② \\ p^2+pq+pq=b \cdots ③ \\ ppq=-\frac{b}{k} \cdots ④ \end{cases}$$

⇐この連立を解きます。

$\therefore\ a=-2p-q \cdots ②'$

$b=p^2+2pq \cdots ③'$

また④より

$b=-kp^2q \cdots ④'$

③′, ④′より b を消去して

$p^2+2pq=-kp^2q$

$p \neq 0$ より両辺を p で割って

$p+2q=-kpq$

$\therefore\ kpq+p+2q=0$

[(　)(　)=(整数) の形に変形します。]

$p(kq+1)+\frac{2}{k}(kq+1)=\frac{2}{k}\ (k \neq 0)$

両辺に k をかけて

$kp(kq+1)+2(kq+1)=2$

$(kp+2)(kq+1)=2$

k, p, q は整数だから

$(kp+2, kq+1)=(\pm1, \pm2), (\pm2, \pm1)$

(複号同順)

(i) $(kp+2, kq+1)=(1, 2)$ のとき

$(kp, kq)=(-1, 1)$

$\therefore\ k=1, (p, q)=(-1, 1)$

または

$k=-1, (p, q)=(1, -1)$

(ii) $(kp+2, kq+1)=(-1, -2)$ のとき

$(kp, kq)=(-3, -3)$

$\therefore\ k=1$ のとき $(p, q)=(-3, 3)$

$k=-1$ のとき $(p, q)=(3, -3)$

$k=3$ のとき $(p, q)=(-1, 1)$

$k=-3$ のとき $(p, q)=(1, -1)$

(iii) $(kp+2, kq+1)=(2, 1)$ のとき

$(kp, kq)=(0, 0)$

これは $kpq \neq 0$ に反する。

(iv) $(kp+2, kq+1)=(-2, -1)$ のとき

$(kp, kq)=(-4, -2)$

$k=1$ のとき $(p, q)=(-4, -2)$

$k=-1$ のとき $(p, q)=(4, 2)$

$k=2$ のとき $(p, q)=(-2, -1)$

$k=-2$ のとき $(p, q)=(2, 1)$

以上から

$(a, b, k)=(-1, -1, 1), (\pm3, -9, 1),$

$(-10, 32, 1), (1, -1, -1)$

$(3,-9,-1),(10,32,-1),(-5,8,2),$
$(5,8,-2),(-1,-1,3),(1,-1,-3)$

※ただただ面倒くさい問題でした。
「kは自然数とする」とかすれば
スマートな問題になるのにね。

$\boxed{2}$ (いつもの公式に代入しましょう)

$$(\text{平均})=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

$$(\text{分散})=(2\text{乗の平均})-(\text{平均の}2\text{乗})$$
$$=\frac{1}{n}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-\bar{x}^2$$

より

(1) $m_x=\frac{1}{n}\{\underbrace{1+3+5+\cdots+(2n-1)}\}$

1からn個の奇数をたすと n^2 になります(常識?)

$$=\frac{1}{n}\cdot n^2=\underline{n}$$

$$S_x^2=\frac{1}{n}\{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2\}-n^2$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2-n^2$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)-n^2$$
$$=\frac{1}{n}\left\{\frac{4}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{4}{2}n(n+1)+n\right\}-n^2$$
($\frac{1}{n}$を分配)

$$=\frac{2}{3}(n+1)(2n+1)-2(n+1)+1-n^2$$
$$=\underline{\frac{1}{3}n^2-\frac{1}{3}}$$

(2) (相関係数)

$$=\frac{(x_k-\bar{x})(y_k-\bar{y})\text{の平均}}{x_k, y_k\text{の標準偏差の積}}$$

より,

$$\text{分子}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})(y_k-\bar{y})$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(2k-1-n)(2k-\bar{y})$$

$\bar{y}=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\cdot\frac{1}{n}=n+1$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{2k-(n+1)\}^2$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{4k^2-4(n+1)k+(n+1)^2\}$$
$$=\frac{1}{n}\left\{\frac{4}{6}n(n+1)(2n+1)-4(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n(n+1)^2\right\}$$
$$=\frac{2}{3}(n+1)(2n+1)-2(n+1)^2+(n+1)^2$$
$$=\frac{2}{3}(n+1)(2n+1)-(n+1)^2$$
$$=\frac{1}{3}(n+1)\{2(2n+1)-3(n+1)\}$$
$$=\frac{1}{3}(n+1)(n-1)=\frac{1}{3}(n^2-1)$$

また, $S_y^2=\frac{1}{n}(2^2+4^2+\cdots+(2n)^2)-(n+1)^2$
$$=\frac{4}{n}(1^2+2^2+\cdots+n^2)-(n+1)^2$$
$$=\frac{4}{n}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-(n+1)^2$$
$$=\frac{1}{3}(n+1)\{2(2n+1)-3(n+1)\}$$
$$=\frac{1}{3}(n^2-1)$$

よって、$S_x = S_y = \sqrt{\frac{1}{3}(n^2-1)}$ より

相関係数は

$$\frac{\frac{1}{3}(n^2-1)}{\sqrt{\frac{1}{3}(n^2-1)}\sqrt{\frac{1}{3}(n^2-1)}} = 1$$

(3) 加えるデータ x' について

x'の和 と 2乗の和 $\sum_{k=1}^{n} x^2$

を求めます。

$$(\text{平均}) = \frac{1}{n}(x'\text{の和}) \text{ より}$$

$$(x'\text{の和}) = n \times 2n = 2n^2$$

$$(\text{分散}) = (2\text{乗の平均}) - (\text{平均の}2\text{乗})$$

$$4n^2 = \frac{1}{n}(2\text{乗の和}) - (2n)^2$$

よって、$(2\text{乗の和}) = 8n^3$

ゆえに、

$$m'_x = \frac{1}{2n}(n^2 + 2n^2) = \frac{3n^2}{2n} = \frac{3}{2}n$$

$$s'^2_x = \frac{1}{2n}\left(\frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n + 8n^3\right) - \left(\frac{3}{2}n\right)^2$$

$$= \frac{2}{3}n^2 - \frac{1}{6} + 4n^2 - \frac{9}{4}n^2$$

$$= \frac{29}{12}n^2 - \frac{1}{6}$$

$\boxed{3}$ (「合成しろ」という声が聞こえてきます。)

$$f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$g(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

(ここで $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ に気づくと楽勝です。)

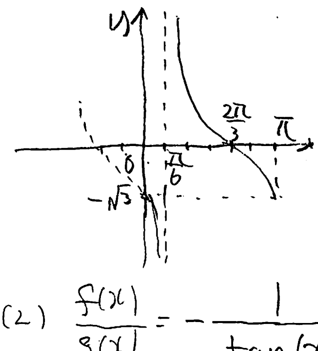
(1) $$y = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$= \frac{2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{2\sin\left(x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{-\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= -\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

よって、グラフは次の通り。



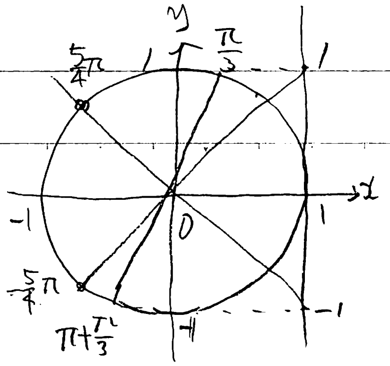
(2) $\frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$ だから

$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ より

$$-\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\tan^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1, \quad \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \pm 1$$

$\frac{\pi}{3} \leqq x + \frac{\pi}{3} \leqq \pi + \frac{\pi}{3}$ より



$x+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$

$\therefore\ x=\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{4}\pi-\frac{\pi}{3}$

$x=\frac{5}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi$

よって,答えは

$(\frac{5}{12}\pi, -1),\ (\frac{11}{12}\pi, -1)$

$(y=-\tan(x+\frac{\pi}{3}))$

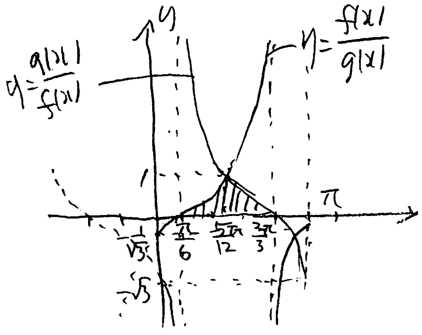
(3) $\frac{f(x)}{g(x)}=-\frac{1}{\tan(x+\frac{\pi}{3})}$

$=-\frac{1}{\tan(x-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2})}$

$=\tan(x-\frac{\pi}{6})$

$[\ \tan(\theta+\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{\tan\theta}\ ]$

であるから, グラフは次の通り



よって, 答えは

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{12}\pi}\tan(x-\frac{\pi}{6})dx+\int_{\frac{5}{12}\pi}^{\frac{2}{3}\pi}\{-\tan(x+\frac{\pi}{3})\}dx$

$x-\frac{\pi}{6}$ の x に $2\cdot\frac{5}{12}\pi-x$ を代入すると

$x-\frac{\pi}{6}=(2\cdot\frac{5}{12}\pi-x)-\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi-x$

$\tan(\frac{2}{3}\pi-x)=-\tan(x-\frac{2}{3}\pi)$

$=-\tan(x-\frac{2}{3}\pi+\pi)$

$=-\tan(x+\frac{\pi}{3})$

よって $y=\frac{g(x)}{f(x)}$ と $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ は $x=\frac{5}{12}\pi$ に関して対称.

従って,

$2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{12}\pi}\tan(x-\frac{\pi}{6})dx=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{12}\pi}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{6})}{\cos(x-\frac{\pi}{6})}dx$

$=-2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{12}\pi}\frac{(\cos(x-\frac{\pi}{6}))'}{\cos(x-\frac{\pi}{6})}dx$

$=-2\left[\log|\cos(x-\frac{\pi}{6})|\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{12}\pi}$

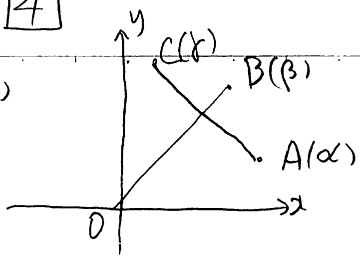
$=-2\cdot(\log\cos\frac{\pi}{4}-\log 1)$

$=-2\log\frac{1}{\sqrt{2}}-0$

$=-2\log 2^{-\frac{1}{2}}=\underline{\log 2}$

$\boxed{4}$

(1)



βの偏角をθとすると，Aを実軸に関して折り返した点をA'(α')とすると，

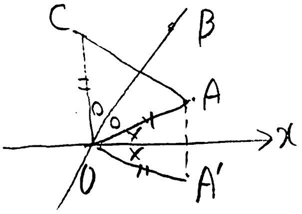
γ=(α'を原点のまわりに2θ回転した点) …①

だから，$\alpha' = \overline{\alpha}$ より

$$\gamma = \overline{\alpha}\cdot\frac{\beta^2}{|\beta|^2} = \overline{\alpha}\cdot\frac{\beta^2}{\beta\overline{\beta}} = \overline{\alpha}\cdot\frac{\beta}{\overline{\beta}}$$

$$= \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}\beta \quad // \cdots ②$$

※①は，次図から



○+×はβの偏角θです

(折り返して2θ回転)

2θ回転を表す複素数は β^2 ではなく $\dfrac{\beta^2}{|\beta|^2}$ です。

(2) D(δ)とすると(1)と同様にして

$$\delta = \overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}\alpha \cdots ③$$

AB // DC のとき $\dfrac{\gamma-\delta}{\beta-\alpha}$ は実数(公式)

$$\therefore \frac{\gamma-\delta}{\beta-\alpha} = \overline{\left(\frac{\gamma-\delta}{\beta-\alpha}\right)}$$

$$\frac{\gamma-\delta}{\beta-\alpha} = \frac{\overline{\gamma}-\overline{\delta}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}$$

[ここからがイバラの道です.]

$$\therefore (\gamma-\delta)(\overline{\beta}-\overline{\alpha}) = (\beta-\alpha)(\overline{\gamma}-\overline{\delta})$$

②,③より

$$\left\{\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}\beta - \overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}\alpha\right\}(\overline{\beta}-\overline{\alpha})$$

$$= (\beta-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\beta}\overline{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}\overline{\alpha}\right)$$

[展開します]

$$\overline{\alpha}\beta - \frac{\overline{\alpha}^2}{\overline{\beta}}\beta - \frac{\overline{\beta}^2}{\overline{\alpha}}\alpha + \alpha\overline{\beta}$$

$$= \alpha\overline{\beta} - \frac{\beta^2}{\alpha}\overline{\alpha} - \frac{\alpha^2}{\beta}\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta$$

$$\therefore \frac{\overline{\alpha}^2}{\overline{\beta}}\beta + \frac{\overline{\beta}^2}{\overline{\alpha}}\alpha = \frac{\beta^2}{\alpha}\overline{\alpha} + \frac{\alpha^2}{\beta}\overline{\beta}$$

両辺に $\alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta}$ $(=|\alpha|^2|\beta|^2)$ をかけて分母をはらうと

$$\overline{\alpha}^2\beta^2|\alpha|^2 + \alpha^2\overline{\beta}^2|\beta|^2$$

$$= \overline{\alpha}^2\beta^2|\beta|^2 + \alpha^2\overline{\beta}^2|\alpha|^2$$

$$\therefore (\overline{\alpha}^2\beta^2 - \alpha^2\overline{\beta}^2)|\alpha|^2 - (\overline{\alpha}^2\beta^2 - \alpha^2\overline{\beta}^2)|\beta|^2 = 0$$

$\therefore (\bar{\alpha}^2\beta^2-\alpha^2\bar{\beta}^2)(|\alpha|^2-|\beta|^2)=0$

$\therefore (\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta})(\bar{\alpha}\beta+\alpha\bar{\beta})(|\alpha|+|\beta|)$
$\times(|\alpha|-|\beta|)=0$

よって、$\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta}=0$ …④、
または $\bar{\alpha}\beta+\alpha\bar{\beta}=0$ …⑤、
または $\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta}=0$ …⑥、

④のとき $\alpha\bar{\alpha}\neq 0$ より、
両辺を $\alpha\bar{\alpha}$ で割って

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}$$

$\frac{\beta}{\alpha}$ は実数だから OA//OB

これは △OAB が存在するという
条件に反する。

⑤のとき、同様にして

$$\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}$$

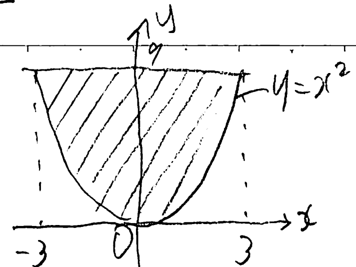
$\frac{\beta}{\alpha}$ は純虚数だから OA⊥OB

よって △OABは∠AOB=90°の直角
三角形。

⑥のとき $|\alpha|=|\beta|$ より OA=OB

よって △OABは OA=OBの二等辺
三角形。

$\boxed{5}$

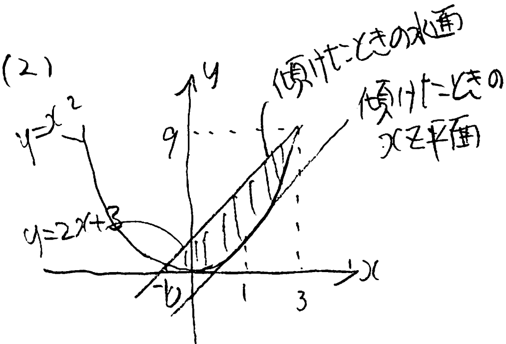


(1) 斜線部分をy軸の周りに
1回転させた立体の体積を
求めればよい。

$$\pi\int_0^9 x^2\,dy=\pi\int_0^9 y\,dy$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[y^2\right]_0^9=\frac{81}{2}\pi$$

(2)



$y=x^2$ の点(1,1)で引いた接線の
傾きは、$y'=2x$ より $y'=2$

点(3,9)を通り傾きが2である
直線の方程式は

$y=2(x-3)+9$

$y=2x+3$

これと $y=x^2$ の交点の x 座標は

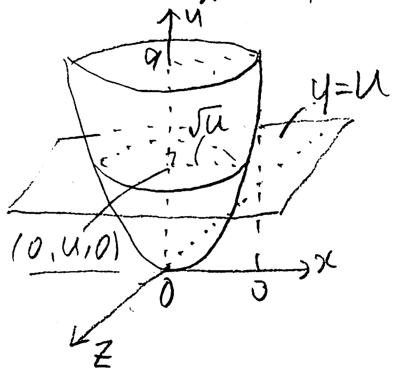
$x^2=2x+3$，$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$，$x=-1, 3$

容器はx軸上の正の部分と接するものとする。

∴ 残った水を平面$x=t$で切ったときの切り口の面積を求めよ。

まず (1)の立体を平面$y=u$で切ったときの切り口は 中心$(0, u, 0)$, 半径$\sqrt{u}$ (← $y=x^2$に$y=u$を代入。そのときの正のx座標が半径) だから, 容器内は



$$x^2+z^2 \leqq (\sqrt{u})^2$$

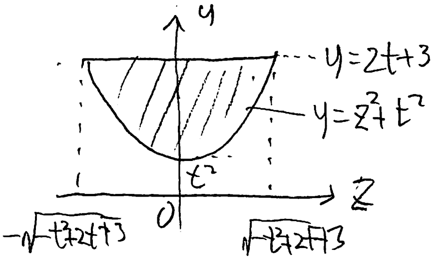
$$\therefore x^2+z^2 \leqq y$$

$$(0 \leqq y \leqq 9)$$

と表すことができる。

よって, 残った水を$x=t$で切ったときの切り口は, $-1 \leqq t \leqq 3$で

$$t^2+z^2 \leqq y,\ y \leqq 2t+3,\ 0 \leqq y \leqq 9$$



$z^2+t^2=2t+3$
より
$z=\pm\sqrt{-t^2+2t+3}$

であるから, その面積$S(t)$は

$$S(t)=\int_{-\alpha}^{\alpha}\{2t+3-(z^2+t^2)\}dz$$

$$\left(\alpha=\sqrt{-t^2+2t+3}\right)$$

$$=-\int_{-\alpha}^{\alpha}(z-\alpha)(z+\alpha)dz$$

$$=\frac{1}{6}(\alpha+\alpha)^3=\frac{1}{6}(2\alpha)^3=\frac{4}{3}\alpha^3$$

$$=\frac{4}{3}(-t^2+2t+3)^{\frac{3}{2}}$$

よって, 求める水の量は

$$\int_{-1}^{3}S(t)dt=\int_{-1}^{3}\frac{4}{3}(-t^2+2t+3)^{\frac{3}{2}}dt$$

$\left(\frac{1}{2}\text{乗なので}\sin\theta\text{に置換するため, 平方完成すると}\right)$

$$=\frac{4}{3}\int_{-1}^{3}\{-(t-1)^2+4\}^{\frac{3}{2}}dt$$

$t-1=2\sin\theta$とおくと $dt=2\cos\theta d\theta$

t	$-1 \to 3$
θ	$-\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}$

$$=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(4-4\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4^{\frac{3}{2}}\cdot(\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\cdot 8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta$$

$$=\frac{32}{3}\cdot 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot(1-\sin^2\theta)d\theta$$

[$\cos\theta$は偶関数]

$$=\frac{64}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)'(1-\sin^2\theta)d\theta$$

$$=\frac{64}{3}\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{64}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{64}{3}\cdot\frac{2}{3}$$

$$=\frac{128}{9}$$ //

(注) 2015年は難問ぞろいで
受験生の平均は2〜3割だった
と思います. いくら中期といえ,
ここまで面倒な問題を出す
必要はないのでは?
[1]はまだ頻出なので(ii)まで
たどり着けるかもしれませんが.

[3](2), [4](2), [5](2)は深い
落とし穴があなたを待っています.

[2]は数研の教科書に類題
が載ってますので, 簡単だった
かも?

(以上)