一個人の感想程度の解答です。タイプミスや勘違いミスなど満載だと思いますので，参考程度に利用してください。

数学 IIB

第1問

[1]

(1)

(i) $y=\log_3 x$ に $x=27$ を代入して

$y=\log_3 27=\log_3 3^3=3\log_3 3=3\cdot 1=3$

よって　$\boxed{ア}\cdots\mathbf{3}$

また，

(ii) $y=\log_2\dfrac{x}{5}$ に $y=1$ を代入して

$$1=\log_2\frac{x}{5}\iff\log_2\frac{x}{5}=1$$

よって，対数の定義から

$$\frac{x}{5}=2^1=2\iff x=5\cdot 2=10$$

よって　$\boxed{イウ}\cdots\mathbf{10}$

(ii) $k^0=1$ であるから，k の値にかかわらず $0=\log_k 1$

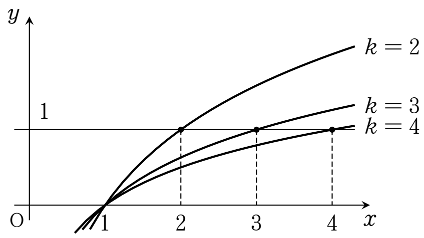
したがって，$y=\log_k x$ のグラフは，k の値によらず定点 $(\mathbf{1},\mathbf{0})\cdots(\boxed{エ},\ \boxed{オ})$ を通る。

(iii) $y=\log_2 x,\ y=\log_3 x,\ y=\log_4 x$ に $y=1$ を代入すると，順に

$$1=\log_2 x,\ 1=\log_3 x,\ 1=\log_4 x$$
$$\iff x=2^1,\ x=3^1,\ x=4^1$$

よって　$x=2,\ x=3,\ x=4$

したがって，それぞれのグラフは点 $(2,1),\ (3,1),\ (4,1)$ を通るから，グラフは次のようになる。



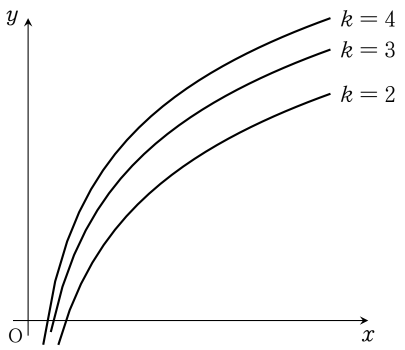
よって　$\boxed{カ}\cdots$ ⓪

$y=\log_2 kx=\log_2 k+\log_2 x$ のグラフは，$y=\log_2 x$ のグラフを y 軸方向に $\log_2 k$ だけ平行移動したものであり，底 $2>1$ だから，x の値にかかわらず

$$\log_2 2x<\log_2 3x<\log_2 4x$$

よって，選択肢のグラフの中で，3つのグラフが交わることなく，下から順に $k=2,3,4$ となっているグラフは

⑤ $\cdots\boxed{キ}$



(2)

(i) $x>0,\ x\neq 1,\ y>0$ のとき，

$$\log_x y=2\iff y=x^2$$

であるから，$\log_x y=2$ のグラフは，

$y=x^2$ の $x>0,\ x\neq 1,\ y>0$ の部分である。

よって　$\boxed{ク}\cdots$ ②

(ii) $0<log_x y<1$

- $0<x<1$ のとき

$$x^0>y>x^1\quad つまり\quad x<y<1$$

したがって，領域は，$0<x<1$，直線 $y=x$ の上側，直線 $y=1$ の下側の共通部分である。

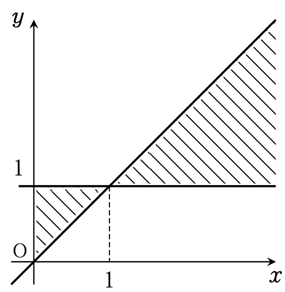
- $x>1$ のとき

$$x^0<y<x^1\quad つまり\quad 1<y<x$$

したがって，領域は，$x>1$，直線 $y=x$ の下側，直線 $y=1$ の上側の共通部分である。

これらを図示すると，次の図の斜線部分である。ただし，境界線上の点はすべて含まない。

よって　$\boxed{ケ}\cdots$ ②



[2]

(1) $P(x)=2x^3+7x^2+10x+5,\ S(x)=x^2+4x+7$ のとき

方程式 $S(x)=0$ の解は，解の公式から

$$x=-2\pm\sqrt{2^2-1\cdot 7}=-2\pm\sqrt{-3}=\mathbf{-2\pm\sqrt{3}\,i}$$

よって　$\boxed{コサ}\cdots\mathbf{-2}$，$\boxed{シ}\cdots\mathbf{3}$

また，割り算を実行すると

$$
\begin{array}{rl}
 & 2x \quad -1 \\ \cline{2-2}
x^2+4x+7 \,) & 2x^3+7x^2+10x+5 \\
 & 2x^3+8x^2+14x \\ \cline{2-2}
 & -x^2-4x+5 \\
 & -x^2-4x-7 \\ \cline{2-2}
 & 12
\end{array}
$$

したがって，$T(x)=\mathbf{2x-1}$, $U(x)=\mathbf{12}$

よって　　$\boxed{\text{ス}}\cdots\mathbf{2}$，$\boxed{\text{セ}}\cdots\mathbf{1}$　$\boxed{\text{ソタ}}\cdots\mathbf{12}$

(2) $P(x)$ を $T(x)$, $S(x)$, $U(x)$ で表すと

$$P(x)=T(x)S(x)+U(x)$$

(i) 余りが定数となるとき，定数 k を用いて $U(x)=k$ とおける。このことから

$$P(x)=T(x)S(x)+k$$

と表される。

ここで，$S(\alpha)=S(\beta)=0$ であるから

$$P(\alpha)=T(\alpha)S(\alpha)+k=k$$
$$P(\beta)=T(\beta)S(\beta)+k=k$$

したがって，「$P(x)=T(x)S(x)+k$ かつ $S(\alpha)=S(\beta)=0$ が成り立つことから，$P(\alpha)=P(\beta)=k$ となることが導かれる」。

よって　　$\boxed{\text{チ}}\cdots$③

したがって，余りが定数となるとき，「$P(\alpha)=P(\beta)$」が成り立つ。

よって　　$\boxed{\text{ツ}}\cdots$①

(ii) $S(x)$ が 2 次式であるから，m, n を定数として $U(x)=mx+n$ とおける。$P(x)$ を $S(x)$, $T(x)$, m, n を用いて表すと，「$\boldsymbol{P(x)=T(x)S(x)+mx+n}$」となる。この等式の x に α, β をそれぞれ代入すると，

$$P(\alpha)=T(\alpha)S(\alpha)+m\alpha+n=m\alpha+n$$
$$P(\beta)=T(\beta)S(\beta)+m\beta+n=m\beta+n$$

より，

「$\boldsymbol{P(\alpha)=m\alpha+n}$ **かつ** $\boldsymbol{P(\beta)=m\beta+n}$」

したがって，$P(\alpha)=P(\beta)$ と α キ β より，

$$m\alpha+n=m\beta+n \iff m(\alpha-\beta)=0$$
$$\iff \boldsymbol{m=0}$$

よって　　$\boxed{\text{テ}}\cdots$①，$\boxed{\text{ト}}\cdots$①　$\boxed{\text{ト}}\cdots$③

$P(x)=x^{10}-2x^9-px^2-5x$, $S(x)=x^2-x-2$ の場合を考える。

$S(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ であるから

$$S(-1)=S(2)=0$$

$P(x)=T(x)S(x)+k$ に $x=-1, 2$ を代入すると

$$P(-1)=T(-1)S(-1)+k=k$$
$$P(2)=T(2)S(2)+k=k$$

ここで，

$$P(-1)=(-1)^{10}-2(-1)^9-p(-1)^2-5(-1)$$
$$=1+2-p+5=8-p$$
$$P(2)=2^{10}-2\cdot2^9-p\cdot2^2-5\cdot2$$
$$=2^{10}-2^{10}-4p-10=-4p-10$$

よって　　$8-p=k$, $-4p-10=k$

これを連立させて解いて　　$\boldsymbol{p=-6}$**，**$\boldsymbol{k=14}$

したがって，

$\boxed{\text{ヌ}}\cdots\mathbf{-6}$，$\boxed{\text{ネノ}}\cdots\mathbf{14}$

第２問

m を $m>1$ を満たす定数とし，$f(x)=2(x-1)(x-m)$ とする。また $S(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ とする。関数 $y=f(x)$ と $y=S(x)$ のグラフの関係について考える。

(1) $m=2$ のとき，すなわち，$f(x)=3(x-1)(x-2)$ のとき，

(i) $f'(x)=0$ となる値を求める。

$f(x)=3(x-1)(x-2)=3(x^2-3x+2)=3x^2-9x+6$ であるから

$f'(x)=6x-9=3(2x-3)$

よって　$f'(x)=0$ のとき $2x-3=0$

すなわち　　$x=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\cdots\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$

(ii) $S(x)$ を計算すると

$$S(x)=\int_0^x f(t)dt$$
$$=\int_0^x(3t^2-\mathbf{9}t+\mathbf{6})dt$$
$$=x^3-\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}x^2+\mathbf{6}x$$

$\boxed{\text{ウ}}\cdots\mathbf{9}$，$\boxed{\text{エ}}\cdots\mathbf{6}$，$\boxed{\text{エ}}\cdots\mathbf{6}$，$\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\cdots\dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}$，$\boxed{\text{キ}}\cdots\mathbf{6}$

$$S'(x)=f(x)=3(x-1)(x-2)$$

であるから，$S'(x)=0$ のとき　$x=1, 2$

$$S(1)=1^3-\frac{9}{2}\cdot1^2+6\cdot1=\frac{5}{2}$$
$$S(2)=2^3-\frac{9}{2}\cdot2^2+6\cdot2=2$$

よって，$S(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$S'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$S(x)$	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$

したがって，

$x=\mathbf{1}$ のとき 極大値 $\mathbf{\frac{5}{2}}$　　$\boxed{ク}\cdots$ **1**, $\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\cdots\mathbf{\frac{5}{2}}$

$x=\mathbf{2}$ のとき 極小値 **2**　　$\boxed{サ}\cdots$ **2**, $\boxed{シ}\cdots$ **2**

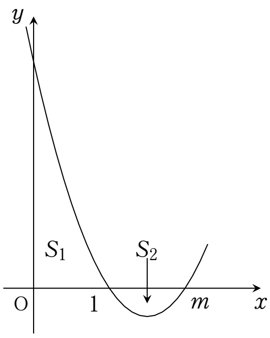
をとる。

(iii) $f(3)=S'(3)$ であるから，$f(3)$ は $y=S(x)$ の $x=3$ における微分係数であることから，$f(3)$ は

「関数 $y=S(x)$ のグラフ上の点 $(3,\,S(3))$ における接線の傾き」

であるから　$\boxed{ス}\cdots$ ❸

(2)



$$S_1=\int_0^1 f(x)dx \quad \boxed{セ}\cdots ⓪$$

$$S_2=\int_1^m \{-f(x)\}dx \quad \boxed{ソ}\cdots ❺$$

$S(1)=S(2)$ が成り立つとき

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_1^m\{-f(x)\}dx$$

移項して

$$\int_0^1 f(x)dx-\int_1^m\{-f(x)\}dx=0$$

$$\int_0^1 f(x)dx+\int_1^m f(x)dx=0$$

$$\int_0^m f(x)dx=0 \qquad \boxed{タ}\cdots ❶$$

$$\int_0^m f(x)dx=\int_0^m 3(x-1)(x-m)dx$$

$$=\int_0^m\{3x^2-3(m+1)x+3m)dx$$

$$=\left[x^3-\frac{3}{2}(m+1)x^2+3mx\right]_0^m$$

$$=m^3-\frac{3}{2}(m+1)m^2+3m\cdot m$$

$$=(1-\frac{3}{2})m^3+\left(-\frac{3}{2}+3\right)m^2$$

$$=-\frac{1}{2}m^3+\frac{3}{2}m^2 \cdots\cdots Ⓐ$$

これが 0 であるから

$$-\frac{1}{2}m^3+\frac{3}{2}m^2=0$$

両辺に -2 かけて m^2 でくくると

$$m^3-3m^2=m^2(m-3)=0 \cdots\cdots Ⓑ$$

よって　　$m=0,\,3$

条件より　　$m>1$

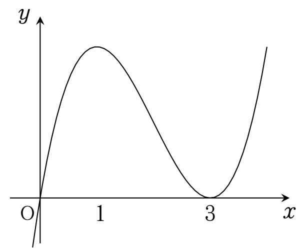
したがって　　$m=3$

このとき ① の［　］より

$$S(x)=x^3-\frac{3}{2}\cdot 4x^2+\frac{3}{2}\cdot 3x=x^3-6x^2+9x$$

$$=x(x^2-6x+9)=x(x-3)^2$$

したがって　$S(x)=0$ は $x=0,\,3$(重解) であるから $y=S(x)$ のグラフの概形は次の通り。



したがって　$\boxed{チ}\cdots$ ❶

また，$S_1>S_2$ が成り立つとき

$$\int_0^1 f(x)dx>\int_1^m\{-f(x)\}dx$$

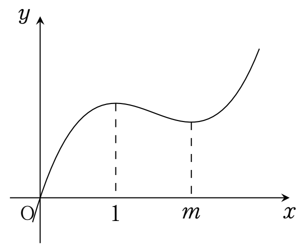
$$\iff \int_0^1 f(x)dx-\int_1^m\{-f(x)\}dx>0$$

$$\iff \int_0^1 f(x)dx+\int_1^m f(x)dx>0$$

$$\iff \int_0^m f(x)dx>0$$

$$\iff S(m)>0$$

これは，$S(x)$ の極小値 $S(m)$ が正であることを示している。したがって，$y=S(x)$ のグラフの概形は次の通り。



したがって　$\boxed{ツ}\cdots$ ❷

(3)（まだ続くんですね！ もういい加減にしてほしい！… 作者評）

関数 $y=f(x)$ のグラフは直線 $x=\mathbf{\frac{m+1}{2}}$ に関して対称である。(← 放物線の軸です。)

よって　　$\boxed{テ}\cdots$ ❸

すべての正の実数 p に対して，

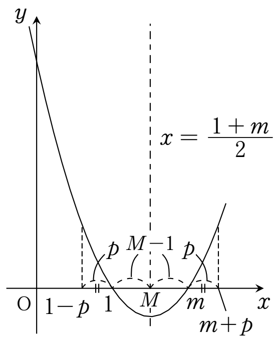
図より

$$\int_{1-p}^{1} f(x)dx$$

$$= \int_{m}^{\boldsymbol{m+p}} f(x)dx \cdots ①$$

（$y=f(x)$ のグラフは軸

$x=\dfrac{1+m}{2}$ に関して対称）

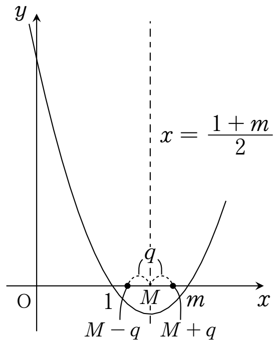


よって　$\boxed{ト}$ … ④

$M=\dfrac{m+1}{2}$ とおくと

$$0<q \leqq M-1$$

であるすべての実数 q に対して



$$\int_{M-q}^{M} \{-f(x)\}dx$$

$$= \int_{M}^{\boldsymbol{M+q}} \{-f(x)\}dx \;\cdots\cdots ②$$

（図より ← 数直線上で $M-q$ と $M+q$ は M に関して対称）

よって　$\boxed{ナ}$ … ②

すべての実数 α, β に対して

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = S(\beta)-S(\alpha)$$

が成り立つことに注意すれば，①，② はそれぞれ

$$S(1)-S(1-p)=S(m+p)-S(m)$$

よって

$$S(1-p)+S(m+p)=\boldsymbol{S(1)+S(m)}$$

よって　$\boxed{ニ}$ … ⓪

$$S(M)-S(M-q)=S(M+q)-S(M)$$

$$2S(M)=\boldsymbol{S(M+q)+S(M-q)}$$

よって　$\boxed{ヌ}$ … ④

以上から，すべての正の実数 p に対して，

2 点 $(1-p, S(1-p)), (m+p, S(m+p))$

を結ぶ線分の中点の x 座標は

$$\frac{(1-p)+(m+p)}{2}=\frac{1+m}{2}=M$$

y 座標は

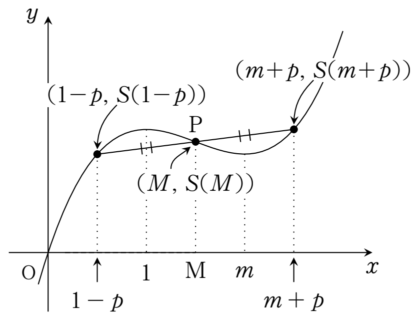
$$\frac{S(1-p)+S(m+p)}{2}=\frac{2S(M)}{2}=S(M)$$

したがって，題意の「中点は p の値によらず一つに定まり，関数 $y=S(x)$ のグラフ上にある。」ことがわかる。

よって　$\boxed{ネ}$ … ②

✎**注**　この中点は，3 次曲線 $y=S(x)$ の変曲点 P である。（図参照）

変曲点 …3 次曲線はある点に関して点対称となっていて，その対称の中心が変曲点と呼ばれる。次の図の点 P である。



結局，2 次関数のグラフは軸に関して対称，3 次関数のグラフは変曲点に関して点対称がテーマのようですが，これは比較的わかりやすい事実なのに，それをこれだけ複雑にわかりにくく設問していることに驚愕です。簡単なことを難しく説明するなんて数学では，いや，学問ではあってはならないことですね。

第 3 問

(1) $m=0\times(1-p)+1\times p=\boldsymbol{p}$

よって，$\boxed{ア}$ … ⓪

母標準偏差を σ とすると，$n=300$ は十分に大きいので，

標本平均 $\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。

よって，$\boxed{イ}$ … ③ （これは公式です。）

$$S=\sqrt{\frac{1}{n}\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\cdots+(X_n-\overline{X})^2\}}$$

ここで，一般に k を $1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数として，

$(X_k-\overline{X})^2={X_k}^2-2X_k\overline{X}+(\overline{X})^2$ であるから，k に 1 から n を代入して，辺々加えると

$$(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\cdots+(X_n-\overline{X})^2$$

$$=({X_1}^2+{X_2}^2+\cdots+{X_n}^2)-2(X_1+X_2+\cdots+X_n)\overline{X}$$

$$+n(\overline{X})^2$$

ここで，$X_k=0$ または 1 だから，${X_k}^2=0$ または 1

よって，${X_k}^2=X_k$ であり，

$X_1+X_2+\cdots+X_n=n\overline{X}$ であるから

$$S=\sqrt{\frac{1}{n}\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\cdots+(X_n-\overline{X})^2\}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{n}\{(X_1+X_2+\cdots+X_n)-2n\overline{X}\cdot\overline{X}+n(\overline{X})^2\}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)-2\overline{X}\cdot\overline{X}+(\overline{X})^2}$$

$$=\sqrt{\overline{X}-2(\overline{X})^2+(\overline{X})^2}$$

$$=\sqrt{\boldsymbol{\overline{X}-(\overline{X})^2}}$$

$$=\sqrt{\boldsymbol{\overline{X}(1-\overline{X})}}$$

よって，$\boxed{ウ}$ … **①**　$\boxed{エ}$ … **②**

一般に，母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$\overline{X}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ここで，

$$\overline{X}=0\times\frac{75}{300}+1\times\frac{75}{300}=\frac{1}{4}$$

$$\sigma=S=\sqrt{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)}=\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

よって，$1.96\times\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{300}}=1.96\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{1}{10\sqrt{3}}$

$=1.96\times\dfrac{1}{40}=0.049$

したがって，$0.25-0.049 \leqq m \leqq 0.25+0.049$

すなわち　　　　$\boldsymbol{0.201 \leqq m \leqq 0.299}$

よって，$\boxed{オ}$ … **⓪**

(2) U_4 の期待値 $E(U_4)$ は，$U_4 \neq 0$ の場合だけを計算すればよいから，

$(X_1, X_2, X_3, X_4)=(1, 1, 1, 0)$ のとき $1\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\times\dfrac{3}{4}$

$(X_1, X_2, X_3, X_4)=(0, 1, 1, 1)$ のとき $1\times\dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^3$

よって，これらを加えて

$$E(U_4)=1\times\left(\frac{1}{4}\right)^3\times\frac{3}{4}+1\times\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^3\times\frac{3}{4}\times 2=\boldsymbol{\frac{3}{128}}$$

よって，$\boxed{カ}$ … **3**

$k=5$ のとき，U_5 が 1 となるのは，次の場合である。

$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)=(1, 1, 1, 0, 0)$ のとき

　$1\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2$ ……①

$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)=(1, 1, 1, 0, 1)$ のとき

　$1\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}$ ……②

$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)=(0, 1, 1, 1, 0)$ のとき

　$1\times\dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\times\dfrac{3}{4}$ ……③

$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)=(0, 0, 1, 1, 1)$ のとき

　$1\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^3$ ……④

$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)=(1, 0, 1, 1, 1)$ のとき

　$1\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^4\times\dfrac{3}{4}$ ……⑤

①＝④, ②＝⑤ であることに注意すると

$$E(U_5)=①\times 2+②\times 2+③$$

$$=1\times\left(\frac{1}{4}\right)^3\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times 2$$

$$+1\times\left(\frac{1}{4}\right)^3\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times 2$$

$$+1\times\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^3\times\frac{3}{4}$$

$$=\frac{9\times 2}{4^5}+\frac{3\times 2}{4^5}+\frac{3\times 3}{4^5}$$

$$=\frac{18+6+9}{4^5}=\frac{33}{2^{10}}=\boldsymbol{\frac{33}{1024}}$$

よって，$\boxed{キク}$ … **33**

4 以上の k について，k と $E(U_k)$ の関係を調べると，点 $(k, E(U_k))$ $(k=4, 5, \cdots, 300)$ は一つの直線上にあることがわかるので，実際にその直線の方程式を求めよう。

傾きは $\dfrac{E(U_5)-E(U_4)}{5-4}=\dfrac{\frac{33}{1024}-\frac{3}{128}}{1}$

$$=\frac{33}{1024}-\frac{24}{1024}=\frac{9}{1024}$$

よって直線の方程式は

$$y=\frac{9}{1024}(x-4)+\frac{3}{128}$$

$x=300$ を代入すると

$$y=E(U_{300})=\frac{9}{1024}(300-4)+\frac{3}{128}$$

$$=\frac{9}{1024}\times 296+\frac{3}{128}$$

$$=\frac{9}{128}\times 37+\frac{3}{128}$$

$$=\frac{333}{128}+\frac{3}{128}$$

$$=\frac{336}{128}=\boldsymbol{\frac{21}{8}}$$

よって，$\boxed{ケコ}$ … **21**，$\boxed{サ}$ … **8**

第4問

(1) 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_{n+1}-a_n=14\ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすとき，数列 $\{a_n\}$ は，初項 a_1，公差 14 の等差数列であるから，

$$a_n=a_1+\mathbf{14}(n-1)$$

よって，$\boxed{\text{オカ}}$ … **14**

$a_1=10$ のとき，

$$a_2=10+14\cdot(2-1)=10+14=\mathbf{24}$$
$$a_3=10+14\cdot(3-1)=10+28=\mathbf{38}$$

よって，$\boxed{\text{アイ}}$ … **24**，$\boxed{\text{ウエ}}$ … **38**

(2) 数列 $\{b_n\}$ が

$$2b_{n+1}-b_n+3=0\ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすとき，これを変形して，

$$b_{n+1}+3=\frac{1}{2}(b_n+3)$$

したがって，数列 $\{b_n\}$ は初項 b_1+3，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列だから

$$b_n+3=\frac{1}{2}(b_1+3)$$

よって　$b_n=(b_1+\mathbf{3})\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{n-1}-\mathbf{3}$

よって，$\boxed{\text{キ}}$ … **3**，$\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ … $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$，$\boxed{\text{コ}}$ … **3**

(3)

$(c_n+3)(2c_{n+1}-c_n+3)=0\ (n=1, 2, 3, \cdots)$ …… ①

(i) • 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし，$c_1=5$ のとき

① に $n=1$ を代入して

$$(c_1+3)(2c_2-c_1+3)=0$$
$$(5+3)(2c_2-5+3)=0$$
$$8(2c_2-2)=0$$

よって，$c_2=\mathbf{1}$　$\boxed{\text{サ}}$ … **1**

• 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし，$c_3=-3$ のとき

① に $n=2$ を代入して

$$(c_2+3)(2c_3-c_2+3)=0$$
$$(c_2+3)\{2\cdot(-3)-c_2+3\}=0$$
$$(c_2+3)(-c_2-3)=0$$
$$-(c_2+3)^2=0$$

よって，$c_2=\mathbf{-3}$

① に $n=1$ を代入して

$$(c_1+3)(2c_2-c_1+3)=0$$
$$(c_1+3)\{2\cdot(-3)-c_1+3\}=0$$
$$(c_1+3)(-6-c_1+3)=0$$
$$(c_1+3)(-c_1-3)=0$$
$$-2(c_1+3)^2=0$$

よって，$c_1=\mathbf{-3}$

以上から　$\boxed{\text{シス}}$ … **−3**，$\boxed{\text{セソ}}$ … **−3**

(ii) $c_3=-3$ のとき，c_4 がどのような値でも

$$(c_3+3)(2c_4-c_3+3)=0 \cdots\cdots ②$$

が成り立つ。

• 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし，$c_3=-3$, $c_4=5$ のとき，

② に $n=4$ を代入して

$$(c_4+3)(2c_5-c_4+3)=0$$
$$(5+3)(2c_5-5+3)=0$$
$$8(2c_5-2)=0$$

よって　$c_5=\mathbf{1}$　$\boxed{\text{タ}}$ … **1**

• 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし，$c_3=-3$, $c_4=83$ のとき，

② に $n=4$ を代入して

$$(c_4+3)(2c_5-c_4+3)=0$$
$$(83+3)(2c_5-83+3)=0$$
$$86(2c_5-80)=0$$

よって　$c_5=\mathbf{40}$　$\boxed{\text{チツ}}$ … **40**

(iii)

> $\boxed{\text{命題 A}}$ 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし，c_1 キ -3 であるとする。このとき，すべての自然数 n について c_n キ -3 である。

命題 A が真であることを証明するには，命題 A の仮定を満たす数列 $\{c_n\}$ について，

「$n=k$ のとき c_n キ -3 が成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときも c_n キ -3 が成り立つこと」

を示せばよい。

よって　$\boxed{\text{テ}}$ … ③

実際の証明は省略します。

(iv)

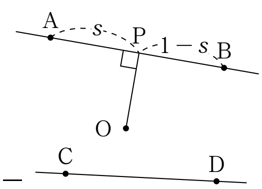
(Ⅰ) $c_1=3$ かつ $c_{100}=-3$ であり，かつ ① を満たす数列 $\{c_n\}$ は$\boxed{\text{命題 A}}$により存在しない。

(Ⅱ) $c_1=-3$ かつ $c_{100}=-3$ であり，かつ ① を満たす数列 $\{c_n\}$ は存在する。たとえば，$c_1=c_2=c_3=c_4=\cdots=c_{100}=-3$ とすれば，① を満たす。

(Ⅱ) $c_1=-3$ かつ $c_{100}=3$ であり，かつ ① を満たす数列 $\{c_n\}$ は存在する。たとえば，$c_1=c_2=c_3=c_4=\cdots=c_{99}=-3$, $c_{100}=3$ とすれば，① を満たす。

よって　$\boxed{\text{ト}}$ … ④

第 5 問



(1) $\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=(3, 6, 0)-(2, 7, -1)$

$=(\mathbf{1, -1, 1})$

$\cdots$ ($\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$)

$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$=(-9,\ 8,\ -4)-(-8,\ 10,\ -3)$

$=(-1,\ -2,\ -1)$

よって

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(1,\ -1,\ 1)\cdot(-1,\ -2,\ -1)$

$=-1+2-1=\mathbf{0}\cdots\ \boxed{\text{オ}}$

(2) P が ℓ_1 上にあるので,

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=s(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\mathbf{(1-s)}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\boldsymbol{s}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

よって　$\boxed{\text{カ}}\cdots$ ④

ここで

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$=s(1,\ -1,\ 1)+(2,\ 7,\ -1)$

$=(s,\ -s,\ s)+(2,\ 7,\ -1)$

$=(s+2,\ -s+7,\ s-1)$

よって

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=|(s+2,\ -s+7,\ s-1)|^2$

$=(s+2)^2+(-s+7)^2+(s-1)^2$

	s^2	s	1
$(s+2)^2$	1	4	4
$(-s+7)^2$	1	-14	49
+) $(s-1)^2$	1	-2	1
	3	-12	54

よって

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=\mathbf{3}s^2-\mathbf{12}s+\mathbf{54}$

したがって

$\boxed{\text{キ}}\cdots$ **3**,　$\boxed{\text{クケ}}\cdots$ **12**,　$\boxed{\text{コサ}}\cdots$ **54**

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=3s^2-12s+54=3(s-2)^2+42$

より, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$, つまり, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ は $s=2$ で最小値をとる。このとき,

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2+2,\ -2+7,\ 2-1)=(4,\ 5,\ 1)$

すると

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1,\ -1,\ 1)\cdot(4,\ 5,\ 1)$

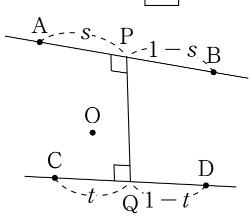
$=4-5+1=\mathbf{0}\cdots\boxed{\text{シ}}\cdots$ ④

したがって, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ はどちらも $\vec{0}$ ではないから

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

よって, 花子さんの考え方でも, 太郎さんの考え型でも, $s=\mathbf{2}$ のとき $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が最小となることがわかる。

ゆえに　$\boxed{\text{ス}}\cdots$ **2**



t を実数として,

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t(\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})$

$=(-8,\ 10,\ -3)$

$+t(-1,\ -2,\ -1)$

$=(-t-8,\ -2t+10,\ -t-3)$

よって

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$=(-t-8,\ -2t+10,\ -t-3)$

$-(s+2,\ -s+7,\ s-1)$

$=(-t-s-10,\ -2t+s+3,\ -t-s-2)$

また

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

が成り立つから

$(-t-s-10,\ -2t+s+3,\ -t-s-2)\cdot(1,\ -1,\ 1)$

$=(-t-s-10)-(-2t+s+3)+(-t-s-2)$

$=-3s-15=0$

したがって　$s=-5$

同様に　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ より

$(-t-s-10,\ -2t+s+3,\ -t-s-2)$

$\cdot(-1,\ -2,\ -1)$

$=-(-t-s-10)-2(-2t+s+3)$

$-(-t-s-2)$

$=6t+6=0$

したがって　$t=-1$

ゆえに,

$\mathrm{P}(2-5,\ 7-(-5),\ -1-5)$

つまり ($\mathbf{-3, 12, -6}$) $\cdots$ ($\boxed{\text{セソ}}$, $\boxed{\text{タチ}}$, $\boxed{\text{ツテ}}$)

$\mathrm{Q}(-8-(-1),\ 10--2(-1),\ -3-(-1))$

つまり ($\mathbf{-7, 12, -2}$) $\cdots$ ($\boxed{\text{トナ}}$, $\boxed{\text{ニヌ}}$, $\boxed{\text{ネノ}}$)

(数学 **IIB** は以上)