2020 センター試験 数学Ⅱ・B (本試験)

第1問

〔1〕

(1) $\sin\theta > \sqrt{3}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ ……①

・加法定理

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$

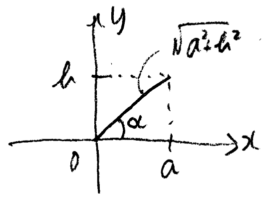
$(右辺) = \sqrt{3}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\left(\cos\theta\cdot\cos\frac{\pi}{3} + \sin\theta\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= \sqrt{3}\left(\cos\theta\cdot\frac{1}{2} + \sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cos\theta + \underline{\frac{3}{2}}\sin\theta$ $\quad \frac{\sqrt{\boxed{ア}}}{\boxed{イ}}, \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{イ}}$

・合成 $a\sin\theta + b\cos\theta$

$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

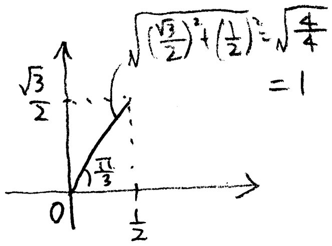


よって①は

$\sin\theta > \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{3}{2}\sin\theta$

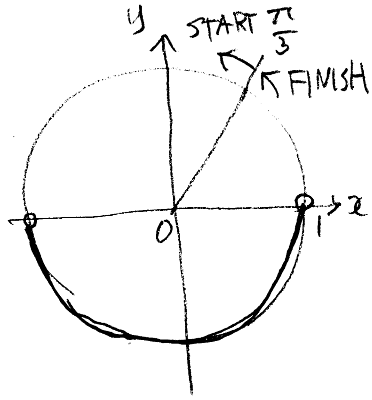
$\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta < 0$

$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) < 0$



$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$\frac{\pi}{3} \leqq \theta + \frac{\pi}{3} < 2\pi + \frac{\pi}{3}$



よって

$\pi < \theta + \frac{\pi}{3} < 2\pi$

$\underline{\frac{2}{3}}\pi < \theta < \underline{\frac{5}{3}}\pi$

$\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}} \qquad \frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$

(2) $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$,

$25x^2 - 35x + k = 0$ が $\sin\theta$ と $\cos\theta$ を解にもつ.

解と係数の関係から

$\sin\theta + \cos\theta = \frac{35}{25} = \frac{7}{5}$ …あ

$\sin\theta\cos\theta = \frac{k}{25}$ ……い

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 2\sin\theta\cdot\cos\theta = 1$

あ、いを代入して

$\left(\frac{7}{5}\right)^2 - 2\cdot\frac{k}{25} = 1$

$\frac{49}{25} - \frac{2}{25}k = 1$

$(\times 25)$

$49 - 2k = 25$

$-2k = -24$

$k = \underline{12}$ $\boxed{ケコ}$

従って　$25x^2 - 35x + 12 = 0$ の2解は

$(5x-3)(5x-4) = 0$

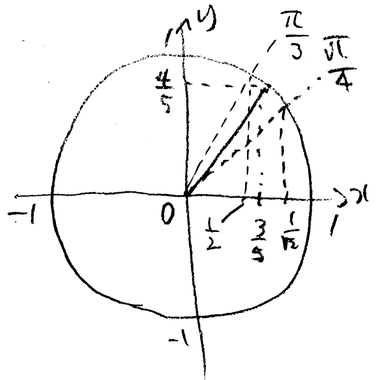
$x = \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$

$\begin{array}{ccc} 5 & -3 & \to -15 \\ 5 & -4 & \to -20 \\ \hline & & -35 \end{array}$

$\sin\theta \geqq \cos\theta$ より

$\sin\theta = \underline{\frac{4}{5}}$, $\cos\theta = \underline{\frac{3}{5}}$

$\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$　$\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$



$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ であり

$\frac{1}{2} < \frac{3}{5}$ だから

$\theta < \frac{\pi}{3}$

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$\frac{9}{25} < \frac{1}{2}$ だから

$\frac{3}{5} < \frac{1}{\sqrt{2}}$

よって、$\theta > \frac{\pi}{4}$

← $\sin\theta = \frac{4}{5}$ で考えてもよい

θ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\sin^2\theta$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1

$\sin^2\theta$ の値と $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$ を比べると　0.64

$\frac{1}{2} < \frac{16}{25} < \frac{3}{4}$

よって、$\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{3}$

以上から　$\frac{\pi}{4} \leqq \theta < \frac{\pi}{3}$.

$\boxed{ソ}$ は $\underline{3}$ $\boxed{ソ}$

[2]

(1) $t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}} = -3$　$(t>0)$

$t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} = (t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}})^2 + 2t^{\frac{1}{3}}\cdot t^{-\frac{1}{3}} = (t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}}) + 2$

$= (-3)^2 + 2 = \underline{11}$ $\boxed{タチ}$

・置き換え

$t^{\frac{1}{3}} = A$, $t^{-\frac{1}{3}} = B$ とおくと

$t^{\frac{2}{3}} = A^2$, $t^{-\frac{2}{3}} = B^2$ より

$t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} = A^2 + B^2 = (A-B)^2 + 2AB$

$$(t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}})^2 = t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}+2\cdot t^{\frac{1}{3}}\cdot t^{-\frac{1}{3}}$$
$$= t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}+2$$
$$= 11+2=13$$

$t^{\frac{1}{3}}>0$, $t^{-\frac{1}{3}}>0$ より

$t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}=\underline{\sqrt{13}}$ $\boxed{ツテ}$

$$t-t^{-1}=(t^{\frac{1}{3}})^3-(t^{-\frac{1}{3}})^3$$
$$=(t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}})^3+3t^{\frac{1}{3}}\cdot t^{-\frac{1}{3}}(t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}})$$
$$=(-3)^3+3(-3)$$
$$=-27-9$$
$$=\underline{-36}$$ $\boxed{トナニ}$

(2)

$$\begin{cases} \log_3(x\sqrt{y})\leqq 5 & \cdots\cdots ② \\ \log_{81}\dfrac{y}{x^3}\leqq 1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

$X=\log_3 x$, $Y=\log_3 y$ とおくと, X, Y は実数全体を動き得る

②は

$$\log_3 x+\log_3\sqrt{y}\leqq 5$$
$$\log_3 x+\frac{1}{2}\log_3 y\leqq 5$$
$$X+\frac{1}{2}Y\leqq 5$$

×2 $\underline{2}X+Y\leqq\underline{10}$ $\boxed{ヌ}$, $\boxed{ネ}$ $\cdots\cdots$ ④

③は

$$\log_{81}\frac{y}{x^3}\leqq 1$$
$$\frac{\log_3\frac{y}{x^3}}{\log_3 81}\leqq 1$$
$$\frac{\log_3 y-\log_3 x^3}{\log_3 3^4}\leqq 1$$
$$\frac{\log_3 y-3\log_3 x}{4}\leqq 1$$

・対数の公式 ($a, A, B, \cdots$ はすべて正)

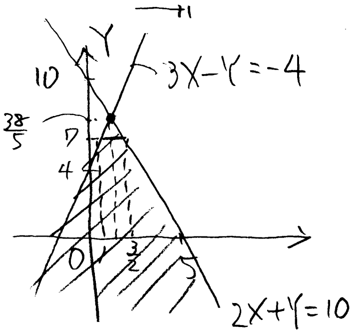
$$\log_a AB=\log_a A+\log_a B$$
$$\log_a\frac{A}{B}=\log_a A-\log_a B$$
$$\log_a A^n=n\log_a A$$
$$\log_a A=\frac{\log_c A}{\log_c a}$$ (底変換)

$$\frac{Y-3X}{4} \leqq 1$$

$\times 4$　$Y-3X \leqq 4$

$\times(-1)$　$-Y+3X \geqq -4$

よって，$3X-Y \geqq -4$ $\boxed{ニ}$，$\boxed{ヒフ}$ ……⑤



④，⑤が表す領域は左図斜線部分で，境界を含む。

$$\begin{cases} 3X-Y=-4 \\ 2X+Y=10 \end{cases}$$

を解くと $(X, Y) = \left(\frac{6}{5}, \frac{38}{5}\right)$

$\frac{38}{5} = 7 + \frac{3}{5}$ より $Y=7$ になるかどうか ④，⑤に $Y=7$ を代入して確かめる。

④に代入して　$2X+7 \leqq 10$　$X \leqq \frac{3}{2}$

⑤に代入して　$3X-7 \geqq -4$　$X \geqq 1$

よって，$Y=7$ のとき $1 \leqq X \leqq \frac{3}{2}$

従って，$Y=7$ となり得る。$\boxed{ヘ}$ は $\underline{7}$ $\boxed{ヘ}$

このとき　$1 \leqq X = \log_3 x \leqq \frac{3}{2}$

底 $3>1$ より　$3 \leqq x \leqq 3^{\frac{3}{2}}$

辺々を2乗すると　$9 \leqq x^2 \leqq 3^3 = 27$

これをみたす最大の整数 x は $\underline{5}$ $\boxed{ホ}$

$\boxed{第2問}$

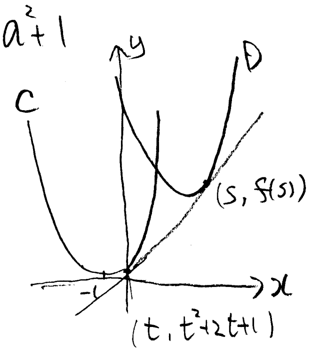
$a>0$，$f(x) = x^2-(4a-2)x+4a^2+1$

$f'(x) = 2x-(4a-2)$

$y = x^2+2x+1 = g(x)$ とする。

$g'(x) = 2x+2$

(1) l と C は点 (t, t^2+2t+1) で接するから，l の方程式は



・接線
曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(\alpha, f(\alpha))$ における接線の方程式は
$y = f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$

$l: y = g'(t)(x-t)+g(t)$

$= (2t+2)(x-t)+t^2+2t+1$

$= (2t+2)x-2t^2-2t+t^2+2t+1$

$= (\underline{2}t+\underline{2})x-t^2+\underline{1}$ ……①

$\boxed{ア}$ $\boxed{イ}$ $\boxed{ウ}$

l と D が点 $(s, f(s))$ で接するとき, l の方程式は

$y = f(s)(x-s)+f(s)$

$= (2s-(4a-2))(x-s)+s^2-(4a-2)s+4a^2+1$　　← $(4a-2)s$ はばらさない.

$= (2s-4a+2)x-2s^2+(4a-2)s+s^2-(4a-2)s+4a^2+1$

$= (\underline{2}s-\underline{4}a+\underline{2})x-s^2+\underline{4}a^2+1$ ……②

$\boxed{エ}$ $\boxed{オ}$ $\boxed{カ}$　　$\boxed{キ}$

①と②は同じ直線を表しているので, 傾きと切片は一致する.

$$\begin{cases} 2t+2=2s-4a+2 & \cdots③ \\ -t^2+1=-s^2+4a^2+1 & \cdots④ \end{cases}$$

(s と t の連立方程式で, ③は1次, ④は2次なので ③を④に代入するしかない)

③より $2t=2s-4a$

$(\div 2)$　$t=s-2a$ ……⑤

⑤を④に代入して

$-(s-2a)^2=-s^2+4a^2$　(④の両辺の1は相殺(そうさい))

$-s^2+4as-4a^2=-s^2+4a^2$

$4as=8a^2$

$a>0$ より $s=\underline{2}a$ $\boxed{コ}$

⑤に代入して $t=2a-2a=\underline{0}$ $\boxed{ケ}$

したがって, $t=0$ を①に代入して, l の方程式は

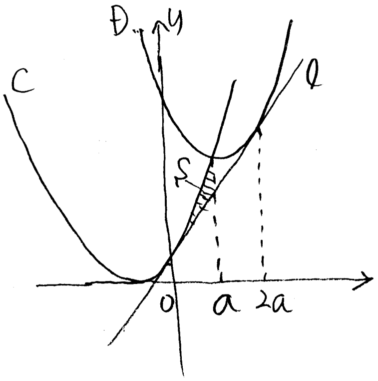
$y=\underline{2}x+\underline{1}$　$\boxed{サ}$, $\boxed{シ}$

(2)　$x^2-(4a-2)x+4a^2+1=x^2+2x+1$ を解く.　　← 交点の座標は, 連立方程式の解.

$-(4a-2)x-2x=-4a^2$

$-4ax=-4a^2$

$a>0$より $x=\underline{a}$ $\boxed{ス}$

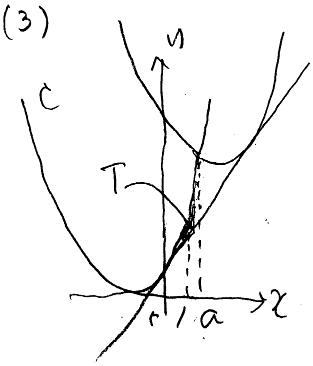


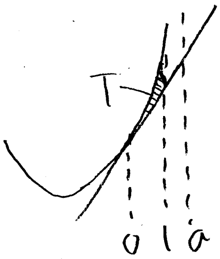
$S=\int_0^a (x^2+2x+1-(2x+1))dx$

$=\int_0^a x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^a$

$=\underline{\frac{a^3}{3}}$ $\boxed{セ}$, $\boxed{ソ}$

(3)





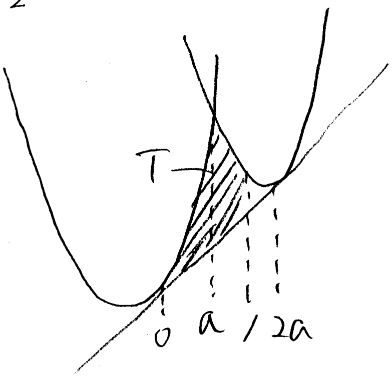
$a>1$のとき

$T=\int_0^1 (x^2+2x+1-(2x+1))dx$

$=\int_0^1 x^2dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\underline{\frac{1}{3}}$ $\boxed{タ}$ $\boxed{ツ}$

$\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1$のとき, $1\leqq 2a\leqq 2$ だから



$T=S+\int_a^1\{g(x)-(2x+1)\}dx$

$=S+\int_a^1(x-2a)^2dx$

$=\frac{a^3}{3}+\left[\frac{1}{3}(x-2a)^3\right]_a^1$

$=\frac{a^3}{3}+\frac{1}{3}(1-2a)^3-\frac{1}{3}(a-2a)^3$

$=\frac{a^3}{3}+\frac{1}{3}(1-3\cdot 2a+3\cdot(2a)^2-(2a)^3)-\frac{1}{3}(-a)^3$

$=\frac{a^3}{3}+\frac{1}{3}(1-6a+12a^2-8a^3)+\frac{1}{3}a^3$

$=\underline{-2}a^3+\underline{4}a^2\underline{-2}a+\underline{\frac{2}{3}}$

$\boxed{テ}$ $\boxed{ト}$ $\boxed{ナ}$ $\frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$

$\frac{1}{3}$ 4 -2 $\frac{1}{3}$
$-\frac{8}{3}$ - $\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$
-2 4 -2 $\frac{2}{3}$

(4) $\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1$のとき

$U=2T-3S=2(-2a^3+4a^2-2a+\frac{2}{3})-3\cdot\frac{a^3}{3}$

$=-5a^3+8a^2-4a+\frac{4}{3}$

-4 8 -4 $\frac{4}{3}$
-1
-5 8 -4 $\frac{4}{3}$

$= h(a)$ とおくと

$h'(a) = -15a^2 + 16a - 4$

$= -(15a^2 - 16a + 4)$

$= -(3a-2)(5a-2)$

$$\begin{array}{ccc} 3 & -2 & \to -10 \\ 5 & -2 & \to -6 \\ \hline & & -16 \end{array}$$

$h'(a) = 0$ のとき

$a = \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{5}$

$\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ に注意して増減表をかくと次の通り。

a	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$h'(a)$		$+$	0	$-$	
$h(a)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$h(a)$ は $a = \dfrac{2}{3}$ で最大値 $h\left(\dfrac{2}{3}\right)$ をとる。

$\dfrac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}$

$h\left(\dfrac{2}{3}\right) = -5\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 + 8\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 - 4\left(\dfrac{2}{3}\right) + \dfrac{2}{3}$

$= \dfrac{2}{3}\left(-5\cdot\dfrac{4}{9} + 8\cdot\dfrac{2}{3} - 4 + 1\right)$

$= \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{20}{9} + \dfrac{16}{3} - 3\right) = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{-20+48-27}{9}$

$= \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{9} = \dfrac{2}{27}$ $\dfrac{\boxed{ハ}}{\boxed{ヒフ}}$

←組み立て除法という手もある。

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{2}{3} & -5 & 8 & -4 & \frac{2}{3} \\ & & -\frac{10}{3} & \frac{28}{9} & -\frac{16}{27} \\ \hline & -5 & \frac{14}{3} & -\frac{8}{9} & \boxed{\frac{2}{27}} \end{array}$$

第3問

$a_1 = 0$, $a_{n+1} = \dfrac{n+3}{n+1}\left\{3a_n + 3^{n+1} - (n+1)(n+2)\right\}$ …① ←ずいぶんゴツイ漸化式ですが，流れに乗れば大丈夫なはず。ふつうはこんなの解けません。

(1) $a_2 = \dfrac{1+3}{1+1}\left\{3a_1 + 3^{1+1} - (1+1)(1+2)\right\}$

$= \dfrac{4}{2}(0 + 9 - 2\cdot 3) = 2(9-6) = 6$ $\boxed{ア}$

(2) $b_n = \dfrac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}$ とおく。

$b_1 = \dfrac{a_1}{3^1\cdot(1+1)(1+2)} = 0$ $\boxed{イ}$

①の両辺を $3^{n+1}(n+2)(n+3)$ で割ると

$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}(n+2)(n+3)} = \dfrac{1}{3^{n+1}(n+2)\cancel{(n+3)}}\cdot\dfrac{\cancel{n+3}}{n+1}\left\{3a_n + 3^{n+1} - (n+1)(n+2)\right\}$

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3^{n+1}(n+2)(n+1)}\{3a_n+3^{n+1}-(n+1)(n+2)\}$$

(分配して)

$$= \frac{3a_n}{3^{n+1}(n+1)(n+2)} + \frac{3^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)(n+2)} - \frac{(n+1)(n+2)}{3^{n+1}(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$= b_n + \underbrace{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}_{\boxed{エ},\boxed{オ}} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \quad \boxed{ウ}\ ,\ \frac{1}{\boxed{カ}}$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$ だから

$$b_{n+1} = b_n + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

b_nを移項して

$$b_{n+1} - b_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\boxed{キ}} - \frac{1}{n+2}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

← $\{b_n\}$の階差数列が現れました.

$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1} - b_k)$ $(n \geqq 2)$ です.

$n \geqq 2$のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-2}{2(n+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right) \quad \boxed{ク}\ \frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$$

← $\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$

$$= \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}$$

↑初項$\left(\frac{1}{3}\right)^{1+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$, 公比$\frac{1}{3}$, 項数$n-1$(!)

$$= \frac{\frac{1}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\times\frac{1}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} = \frac{1}{6}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{6} - \underbrace{\frac{1}{6}}_{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}} - \frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

よって, $n \geqq 2$のとき

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1} - b_k)$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right) - \left\{\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right\}$$

$$= \frac{n-1}{2(n+1)} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

$$= \frac{3(n-1)-(n+1)}{6(n+1)} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

$$= \frac{2n-4}{6(n+1)} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

$$= \underline{\frac{n-2}{3(n+1)}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} \qquad \frac{n-\boxed{ソ}}{\boxed{タ}(n+\boxed{チ})}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ.

(3) (2)より

$$b_n = \frac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)} = \frac{n-2}{3(n+1)} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

よって,

$$a_n = 3^n(n+1)(n+2)\left\{\frac{n-2}{3(n+1)} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right\}$$

$$= \frac{3^n\cancel{(n+1)}(n+2)\cdot(n-2)}{3\cancel{(n+1)}} + 3^n(n+1)(n+2)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

$$= 3^{n-1}(n+2)(n-2) + \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

$$= \underline{3^{n-1}(n^2-4) + \frac{(n+1)(n+2)}{2}} \qquad \boxed{テ}\sim\boxed{ヌ}$$

$n \equiv 0 \pmod 3$ のとき

$$a_n \equiv \frac{1\cdot 2}{2} = 1 \pmod 3$$

$n \equiv 1 \pmod 3$ のとき

$$a_n \equiv \frac{2\cdot 3}{2} = 3 \equiv 0 \pmod 3 \quad (a_1 = 0 \equiv 0 \pmod 3)$$

$n \equiv 2 \pmod 3$ のとき

$$a_n \equiv \frac{3\cdot 4}{2} = 6 \equiv 0 \pmod 3$$

よって, a_{3k}, a_{3k+1}, a_{3k+2} を3で割った余りは

それぞれ $\underline{1}$, $\underline{0}$, $\underline{0}$ である.

$\boxed{ネ}$ $\boxed{ノ}$ $\boxed{ハ}$

$2020 = 3\times 673 + 1$

$$\begin{array}{r} 673 \\ 3\overline{)2020} \\ 18 \\ \hline 22 \\ 21 \\ \hline 10 \end{array}$$

よって、$\{a_n\}$の初項から第2020項までの和

を3で割ったときの余りは

$$\underbrace{0+0+1+0+0+1+\cdots+0+0+1}_{3\times 673\text{個}}+\underset{2020\text{番目}}{0}=673$$

を3で割った余りに等しい。

$673=3\times224+1$ より答えは $\underline{1}$ $\boxed{\text{ヒ}}$

第4問

$A(3,3,-6)$, $B(2+2\sqrt{3}, 2-2\sqrt{3}, -4)$

(1) $|\overrightarrow{OA}|=|3(1,1,-2)|=3\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}=\underline{3\sqrt{6}}$ $\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$

$|\overrightarrow{OB}|=|2(1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}, -2)|$

$=2\sqrt{(1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2+(-2)^2}$

$=2\sqrt{(4+2\sqrt{3})+(4-2\sqrt{3})+4}$

$=2\sqrt{12}=\underline{4\sqrt{3}}$ $\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3(1,1,-2)\cdot 2(1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}, -2)$

$=6\{1\cdot(1+\sqrt{3})+1\cdot(1-\sqrt{3})-2\cdot(-2)\}$

$=6(1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+4)=\underline{36}$ $\boxed{オカ}$

(2) $\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ とおく。

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC}$ より $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0$

よって、$\overrightarrow{OA}\cdot(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB})=0$

$s|\overrightarrow{OA}|^2+t\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$s\cdot54+36t=0$

$3s+2t=0\cdots$ あ

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=24$ より

$\overrightarrow{OB}\cdot(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB})=24$

$s\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+t|\overrightarrow{OB}|^2=24$

$36s+48t=24$

$3s+4t=2\cdots$ い

あ, い より $t=1$, $s=-\dfrac{2}{3}$
$\boxed{コ}$ $\dfrac{\boxed{キク}}{\boxed{ケ}}$

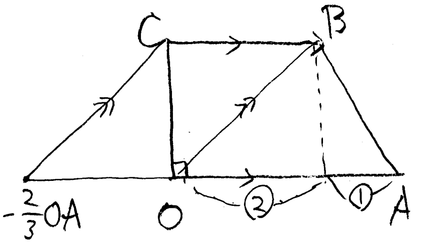
したがって

$$|\overrightarrow{OC}|^2=\left|-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|^2$$
$$=\frac{4}{9}|\overrightarrow{OA}|^2-\frac{4}{3}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2$$
$$=\frac{4}{9}\cdot 54-\frac{4}{3}\cdot 36+48$$
$$=24-48+48=24$$

$|\overrightarrow{OC}|=2\sqrt{6}$ $\boxed{サ}\sqrt{\boxed{シ}}$

(3) $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}-\left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$

$=(2,2,-4)$ $\boxed{ス}$, $\boxed{セ}$, $\boxed{ソタ}$



$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{CB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$ より
四角形OABCは左図のようになるから $\boxed{チ}$ は ③ 平行四辺形ではないが台形である.

四角形OABCの面積は

$$\frac{1}{2}(|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{CB}|)\cdot|\overrightarrow{OC}|$$
$$=\frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{OA}|+\frac{2}{3}|\overrightarrow{OA}|\right)\cdot|\overrightarrow{OC}|$$
$$=\frac{5}{6}|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OC}|=\frac{5}{6}\cdot 3\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}=30$$ $\boxed{ツテ}$

(4) $\overrightarrow{OD}=(x,y,1)$ とすると

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OD}$ より $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=0$

$3(1,1,-2)\cdot(x,y,1)=0$

$x+y-2=0$ ….う

$$\overrightarrow{OC}=-\frac{2}{3}(3,3,-6)+(2+2\sqrt{3},2-2\sqrt{3},-4)$$
$$=(-2,-2,4)+(2+2\sqrt{3},2-2\sqrt{3},-4)$$
$$=(2\sqrt{3},-2\sqrt{3},0)$$

だから

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=2\sqrt{6}$ より

$2\sqrt{3}(1,-1,0)\cdot(x,y,1)=2\sqrt{6}$

$2\sqrt{3}(x-y)=2\sqrt{6}$

$x-y=\sqrt{2}$ …②

$$\begin{array}{rrl} & 1\quad 1 & =2 \\ +) & 1\ -1 & =\sqrt{2} \\ \hline & 2 & =2+\sqrt{2} \end{array}$$

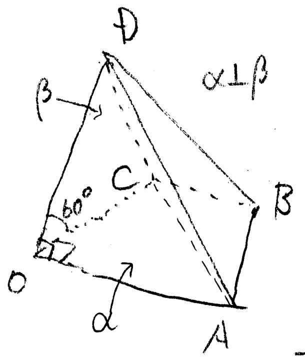
$$\begin{array}{rrl} & 1\quad 1 & =2 \\ -) & 1\ -1 & =\sqrt{2} \\ \hline & 2 & =2-\sqrt{2} \end{array}$$

③,②より,

$x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$, $y=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

よって,

$D\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ $\boxed{ト}$~$\boxed{ノ}$



$|\overrightarrow{OC}|=2\sqrt{6}$,

$|\overrightarrow{OD}|=\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1^2}$

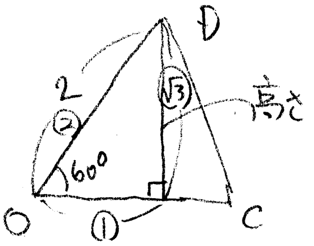
$=\sqrt{\dfrac{6+4\sqrt{2}}{4}+\dfrac{6-4\sqrt{2}}{4}+1}$

$=\sqrt{4}=2$

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=2\sqrt{6}$ だから

$\cos\angle COD=\dfrac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}}{|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OD}|}=\dfrac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot 2}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\angle COD\leqq 180^\circ$ より $\angle COD=60^\circ$ $\boxed{ハヒ}^\circ$



左図より, 三角形ABCを底面とする四面体DABCの高さは $\sqrt{3}$, $\sqrt{\boxed{フ}}$

よって, 四面体DABCの体積は

$\dfrac{1}{3}\times\triangle ABC\times\sqrt{3}=\dfrac{1}{3}\times(台形OABC-\triangle OAC)\times\sqrt{3}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\left(30-\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|\right)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\left(30-\dfrac{1}{\cancel{2}}\times 3\sqrt{6}\times\cancel{2}\sqrt{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times(30-18)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times 12=4\sqrt{3}$ $\boxed{ヘ}\sqrt{\boxed{ホ}}$

(以上)