2020センター試験 数学I・A（本試）

第1問

［1］

(1) $\ell : y=(a^2-2a-8)x+a$ の傾きが負となるのは $a^2-2a-8<0$ のときである。

$(a+2)(a-4)<0$ より $\underset{\boxed{\text{アイ}}}{\underline{-2}}<a<\underset{\boxed{\text{ウ}}}{\underline{4}}$

(2) ℓ で $y=0$ とすると

$0=(a^2-2a-8)x+a$

$(a^2-2a-8)x=-a$

$a^2-2a-8 \neq 0$ より

$$x=-\frac{a}{a^2-2a-8}$$

よって $b=-\dfrac{a}{(a+2)(a-4)}$

- $a>0$ のとき，$b>0$ となるとき

$$-\frac{a}{(a+2)(a-4)}>0$$

両辺を $-a(<0)$ で割って

$$\frac{1}{(a+2)(a-4)}<0$$ ←分子1は正なので分母は負.

よって，$(a+2)(a-4)<0$

$-2<a<4$

$a>0$ だから $\underset{\boxed{\text{エ}}}{\underline{0}}<a<\underset{\boxed{\text{オ}}}{\underline{4}}$

- $a \leqq 0$ のとき，$b>0$ となるのは

$$-\frac{a}{(a+2)(a-4)}>0 \cdots\cdots ①$$

$a=0$ は $0>0$ となって不適. ←$-a=0$ のとき，$-a$ では割れません。

よって，$a<0$.

①の両辺を $-a(>0)$ で割って

$$\frac{1}{(a+2)(a-4)}>0$$

よって $(a+2)(a-4)>0$

$a<-2,\ 4<a$

$a<0$ より

$\underline{a<-2}$ $\boxed{カキ}$

$a=\sqrt{3}$ のとき

$$b=-\frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2-2\times\sqrt{3}-8}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{3-2\sqrt{3}-8}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{-5-2\sqrt{3}}$$

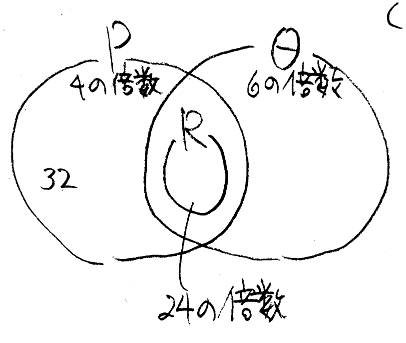
$$=\frac{\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(5-2\sqrt{3})}{(5+2\sqrt{3})(5-2\sqrt{3})}$$

$$=\frac{5\sqrt{3}-6}{5^2-(2\sqrt{3})^2}=\frac{5\sqrt{3}-6}{25-12}$$

$$=\underline{\frac{5\sqrt{3}-6}{13}} \qquad \frac{\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケ}}-\boxed{コ}}{\boxed{サシ}}$$

〔2〕 集合P, Q, Rの包含関係は次の通り.



(1) 32は4の倍数であって，6の倍数ではないから

$\underline{32\in P\cap\overline{Q}}$ ② $\boxed{ス}$

(2) $P \cap Q$ は 4と6の最小公倍数である12の倍数を要素にもつ集合だから、$P \cap Q$ に属する最小の自然数は $\underline{12}$ $\boxed{セソ}$

また、12は24の倍数ではないので

$\underline{12 \notin R}$

$\boxed{タ}$ ④

(3) 命題「$a \Rightarrow b$」において、12が反例」ということは、a, b を満たす自然数の集合をそれぞれ A, B とするとき

$12 \in A$ かつ $12 \notin B$

が成り立つことである。

選択肢 ⓪ ⇒ ③ の中で $12 \in A$ となるものを探す。

$12 \in P \cap Q$, $12 \in P \cup Q$, $12 \notin R$,

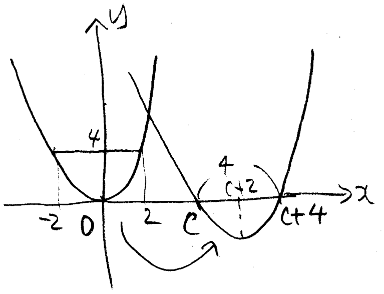
$12 \in P \cap Q$ より ⓪, ①, ③ は成り立つ

次に $12 \notin B$ となるか確かめよう

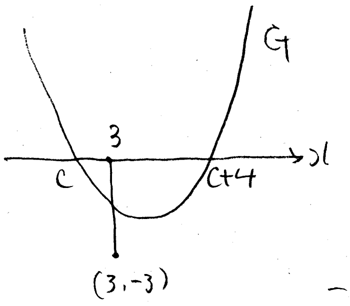
$12 \in \overline{R}$ だから ⓪, ① は不適, $12 \notin R$ だから ③ は成り立つ。

よって、$\boxed{チ}$ は ③ $\boxed{チ}$

〔3〕 $y=x^2$ を平行移動して 2点 $(c, 0)$, $(c+4)$ を通るように平行移動して得られるグラフ G の方程式は



$$y=(x-c)\{x-(c+4)\}$$
$$=x^2-(c+c+4)x+c(c+4)$$
$$=x^2-(2c+4)x+c(c+4)$$
$$=x^2-2\underset{\boxed{ツ}}{\underline{(c+2)}}x+c\underset{\boxed{テ}}{\underline{(c+4)}}$$



Gにおいて, $x=3$ のときy座標が
$-3 \leqq y \leqq 0$
となればよい

$-3 \leqq 3^2-2(c+2)\cdot 3+c(c+4) \leqq 0$

$-3 \leqq 9-6(c+2)+c^2+4c \leqq 0$

$-3 \leqq 9-6c-12+c^2+4c \leqq 0$

$-3 \leqq c^2-2c-3 \leqq 0$

1	4	0
	−6	−12
		9
1	−2	−3

左の不等号より

$-3 \leqq c^2-2c-3$

$c^2-2c \geqq 0$

$c(c-2) \geqq 0$

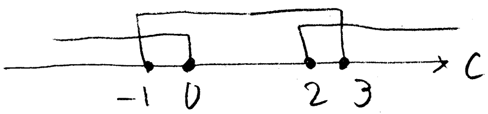
$c \leqq 0,\ 2 \leqq c$

右の不等号より

$c^2-2c-3 \leqq 0$

$(c+1)(c-3) \leqq 0$

$-1 \leqq c \leqq 3$



よって, $-1 \leqq c \leqq 0,\ 2 \leqq c \leqq 3$

$\boxed{ト}$ $\boxed{ナ}$ $\boxed{ニ}$ $\boxed{ヌ}$

(2) $2 \leqq c \leqq 3$ の場合を考える.

Gが点$(3,-1)$を通るとき

$-1 = 3^2-2(c+2)\cdot 3+c(c+4)$ ←右辺は上で計算している

$-1 = c^2-2c-3$

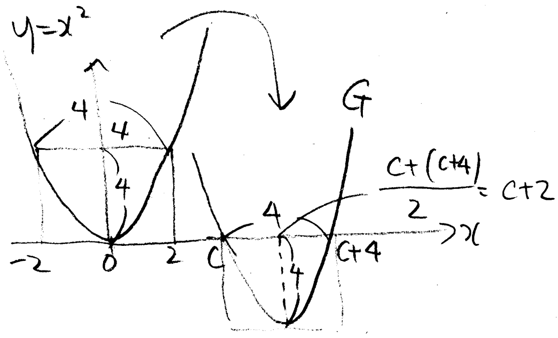
$c^2-2c-2=0$

$c=1\pm\sqrt{3}$

$2 \leqq c \leqq 3$ より $c=1+\sqrt{3}$

Gは $y=x^2$ を x軸方向に $c+2$ だけ平行移動したものだから $\boxed{ネ}+\sqrt{\boxed{ノ}}$ は $3+\sqrt{3}$

y軸方向には -4 だけ平行移動したものである. (右図参照)



[計算なら

$y=x^2-2(1+\sqrt{3}+2)x+(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{3}+4)$

$=x^2-2(3+\sqrt{3})x+(1+\sqrt{3})(5+\sqrt{3})$

$=(x-3-\sqrt{3})^2-(3+\sqrt{3})^2+(1+\sqrt{3})(5+\sqrt{3})$

ふつうに展開して

$=(x-3-\sqrt{3})^2-(9+6\sqrt{3}+3)+(5+\sqrt{3}+5\sqrt{3}+3)$

$=(x-3-\sqrt{3})^2-12-6\sqrt{3}+8+6\sqrt{3}$

$=(x-3-\sqrt{3})^2-\underline{4}$]

Gとy軸との交点のy座標は

$(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{3}+4)$

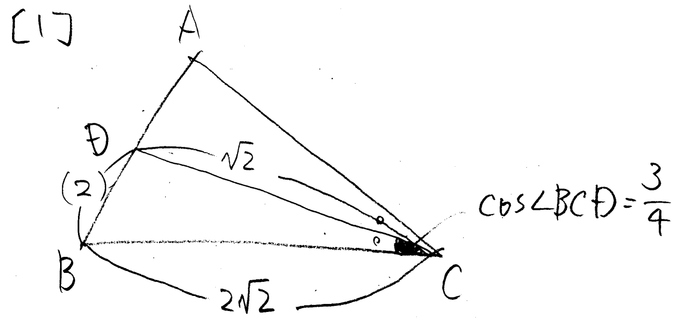
$=(1+\sqrt{3})(5+\sqrt{3})$ （上の計算参照）

$=\underline{8}+\underline{6}\sqrt{\underline{3}}$

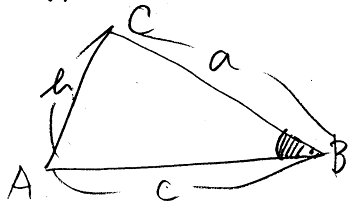
ク ケ コ

第2問

[1]



余弦定理
次の図で



$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$\triangle BCD$で余弦定理を適用して

$BD^2=(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\angle BCD$

$=8+2-8\times\frac{3}{4}=10-6=4$

$BD>0$ だから $BD=\underline{2}$ ア

$\angle ADC+\angle BDC=180^\circ$ だから

$\sin\angle ADC=\sin(180^\circ-\angle BDC)$

$=\sin\angle BDC$

$\leftarrow \sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$
（補角の公式）

よって，まず $\cos\angle BDC$ を求めよう．

$$\cos\angle BDC=\frac{2^2+(\sqrt{2})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\cdot\sqrt{2}}$$

$$=\frac{4+2-8}{2\cdot2\cdot\sqrt{2}}=\frac{-\cancel{2}^{1}}{\cancel{2}_{1}\cdot2\cdot\sqrt{2}}$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$\sin\angle BDC>0$ より

$$\sin\angle BDC=\sqrt{1-\cos^2\angle BDC}$$

$$=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1-\frac{1}{8}}$$

$$=\sqrt{\frac{7}{8}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}}{4}$$

よって，$\sin\angle ADC=\underline{\frac{\sqrt{14}}{4}}$ $\frac{\sqrt{\boxed{イウ}}}{\boxed{エ}}$

◎三角比の大公式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$
（θが何であっても成り立つ偉大な公式）

ADは∠ACBの2等分線だから

AC : BC = AD : DB

よって　AC・DB = BC・AD

両辺を DB・AD で割って 目標の $\frac{AC}{AD}$ を導くと

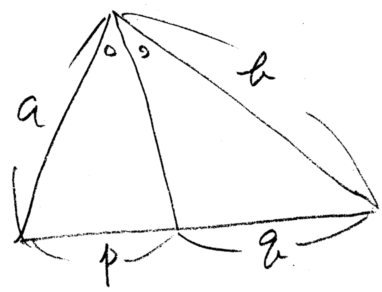
$$\frac{AC\cdot DB}{DB\cdot AD}=\frac{BC\cdot AD}{DB\cdot AD}$$

$$\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{DB}$$

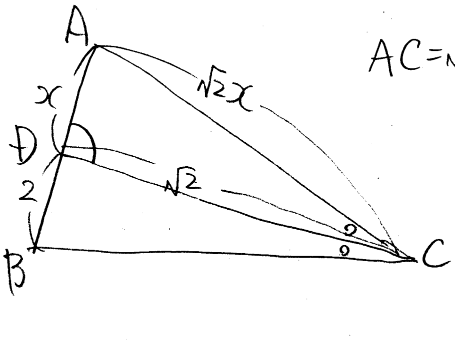
BD=2，BC=$2\sqrt{2}$ だから

$$\frac{AC}{AD}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\underline{\sqrt{2}}\ \boxed{オ}$$

・角の2等分線の公式



p : q = a : b

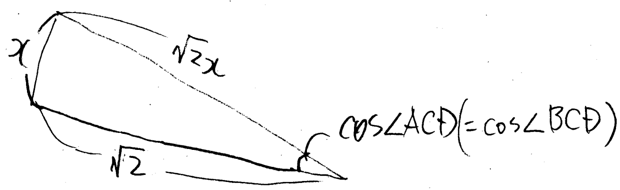


AC=$\sqrt{2}$AD より

AD=x とおくと

AC=$\sqrt{2}x$

△ACDで余弦定理を適用して



$$x^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2}x)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}x\cdot\cos\angle ACD$$

$$x^2=2+2x^2-4x\cdot\frac{3}{4}$$

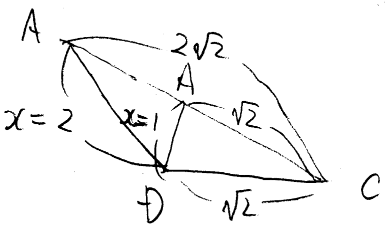
$$x^2=2+2x^2-3x$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$(x-1)(x-2)=0$$

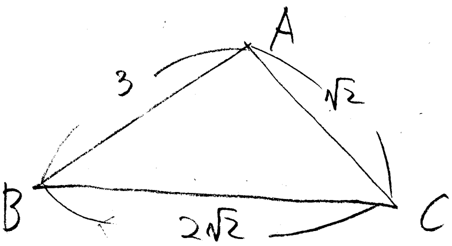
$$x=1,\ 2$$

次の図のようになる



前ページ⑥の冒頭の $\cos\angle BDC=-\frac{1}{2\sqrt{2}}(<0)$ より，∠BDCは鈍角。従って，∠ADCは鋭角だから，上図より $x=1$

よって，$AD=\underline{1}$ $\boxed{カ}$



（$\cos\angle ACB=\cos(2\times\angle BCD)=2\cos^2\angle BCD-1$
という2倍角の公式を使ってもよいが）

余弦定理により

$$\cos\angle ACB=\frac{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-3^2}{2\cdot2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{8+2-9}{2\cdot2\cdot2}=\frac{1}{8}$$

$\sin\angle ACB > 0$ より

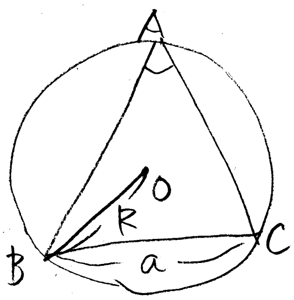
$$\sin\angle ACB = \sqrt{1-\cos^2\angle ACB}$$
$$= \sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}$$
$$= \sqrt{1-\frac{1}{64}} = \sqrt{\frac{63}{64}}$$
$$= \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

よって、外接円の半径を R とすると

$$\frac{AB}{\sin\angle ACB} = 2R$$

$$R = \frac{AB}{2\cdot\sin\angle ACB} = \frac{3}{2\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}}$$
$$= \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{2}_{1}}\cdot\frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{3}_{1}\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7} \qquad \frac{\boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}}{\boxed{ケ}}$$

・正弦定理



$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

(向かい合う辺と角の関係)

※ 何回も似たような計算をしなければなりません。何てこった!!

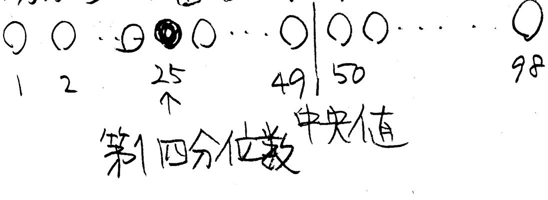
[2] 1つ1つ探るしか手がありません。
極端な場合を考えてみるとうまくいきます。

⓪ すべてのデータが等しいとき不適。×

① すべてのデータが等しい(たとえば 0)のとき、四分位範囲 $=0$、標準偏差 $=\sqrt{(2乗の平均)-(平均)^2}=0$ だから、成り立たない。×

② すべてのデータが等しいとき、中央値より小さい観測値の個数は 0。よって不適。×

③ 最大値を除いた 98 個のデータの第1四分位数は、小さい方から 25 番目のデータであるから、これは正しい。○



④ すべてのデータが 0のとき，残りの観測値の個数は 元のまま79個だから成り立たない.

⑤ 消去法(③しか正解がなかったので)より成り立つ(はず)。

よって，答えは ③と⑤

$\boxed{コ}$ $\boxed{サ}$

(2) (Ⅰ) P10，P44は明らかに1より大きいから誤

(Ⅱ) P7からP8は中央値が減少しているから誤

(Ⅲ) (P47の左にP1の図をかいてみる)
P47の最小値とP1の最大値の差は1.5以上であることが分かるから正しい.

よって，答えは ⑥ $\boxed{シ}$

(3) 最小値は 79.5以上80.0未満だから
①，②，⑥，⑦は誤り.
最大値は 81.5以上82.0未満だから
⓪，③は誤り
残ったのは ④と⑤
第1四分位数は，5番目と6番目の平均だから

○ ○ ‥ ○|○ ‥‥ ○|○ ‥‥ ○
1 2 　5 6 　10 11 　20
第1四分位数 中央値

80.0以上80.5未満である.

よって，④が正しい. $\boxed{ス}$

		累積度数
79.5〜80.0	2	2
80.0〜80.5	4	6 ← 第1四分位数
80.5〜81.0	9	15
81.0〜81.5	3	18
81.5〜82.0	2	20
	20	

(4) 男女の平均寿命をそれぞれ x, y とすると、散布図より常に $x<y$

よって、$y-x$ を 5.5から7.5までの0.5刻みで考えていく。散布図に引いてある5本の直線は上から下(or 左から右)に

$y=x+7.5$ つまり $y-x=7.5$,
$y-x=7.0$, $y-x=6.5$, ……, $y-x=5.5$

であるから、○の個数を数えて次のような度数分布表ができる。

$y-x$	度数
5.5〜6.0	9
6.0〜6.5	22
6.5〜7.0	13
7.0〜7.5	3 ← 注目

7.0以上7.5未満の度数が3であることから

答えは ③ 包

第3問 (一難去ってまた一難というところですね。)

[1] 順に確率を求めていきます。

⓪ 余事象(5回とも裏)を考えると

$$p=1-\left(\frac{1}{2}\right)^5=1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}=0.96\cdots>0.95$$

$$\begin{array}{r} 0.96 \\ 32\,\overline{)\,310} \\ 288 \\ \hline 220 \\ 192 \\ \hline 28\cdots \end{array}$$

よって、正しい。

① 大数の法則により回数を大きく増やせば $\frac{3}{5}$ といえるが、5回では判断できない。

よって、誤り

② 余事象(書かれた文字が同じ)を考えると

「ろ」と書かれたカードを2枚取り出す確率は

$$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{\frac{5\cdot4}{2\cdot1}}=\frac{1}{10}\cdots あ$$

「は」と書かれたカードを2枚取り出す確率は

同じく $\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}\cdots い$

よって，書かれた文字が異なる確率は

$$1-(あ+い)=1-\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

従って，②は正しい.

③（条件付き確率です.）

2体がともに「オモテ」と発言するのは，正しく発言する場合か正しく発言しない場合だから，「オモテ」と発言する確率は

$$0.9\times0.9+0.1\times0.1=0.81+0.01$$
$$=0.82\cdots う$$

2体が「オモテ」と正しく発言する確率は

$$0.9\times0.9=0.81\cdots え$$

よって，題意の確率は

$$\frac{え}{う}=\frac{0.81}{0.82}=\frac{81}{82}>\frac{81}{90}=0.9$$

従って，③は誤り

以上から $\boxed{ア}$ と $\boxed{イ}$ は $\underline{0}$ と $\underline{2}$ である.

［2］ 表を○，裏を×と表すことにする.

コイン	点数
○	2
×	−1

(1) 2回投げ終わって持ち点が−2点となるのは，2回とも裏の場合だから，確率は

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\underline{\frac{1}{4}}\ \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$$

コイン	点数
○○	4
○×	1
×○	1
××	−2

また，持ち点が1点である場合は，○×または×○のときだから

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{2}\quad \frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$$

(2) 表がx回，裏がy回出たときの点数は

$2x-y$（点）

これが0になるとき

$2x-y=0$ …①

$y=2x$

するとコインを投げた回数は

$x+2x=3x$（回）（←3の倍数）

$3x$は1以上5以下の整数だから

$3x=3$

従って，$\boxed{キ}$は 3 $\boxed{キ}$

このとき，$x=1$，$y=2$より，○が1回，×が2回だから

$$ {}_3C_1\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=3\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8}\quad \frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$$

(3) いったん0点になってから4点になるとき，最初3回は○が2回，×が1点，残りの2回は○○のときだから，この場合の確率は

$$\frac{3}{8}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}\ \cdots ②$$

←3回目に0点になったらゲーム終了．
よって，3回目に0点になる場合は除きましょう．

○がx回，×がy回出てゲームが終了し、得点が4点になるとき

$$\begin{cases} 2x-y=4 & \cdots ③ \\ x+y=5 & \cdots ④ \end{cases}$$

③，④を連立させて解くと $x=3$，$y=2$

このときの確率は

${}_5C_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4} = \frac{10}{32}$ … ⑤

⑤には③が含まれているので $\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サシ}}$ は

⑤ − ③ $= \frac{10}{32} - \frac{3}{32} = \frac{7}{32}$ 〃 $\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サシ}}$

(4) ゲームが終了した時点で持ち点が4点である事象をA，コインを2回投げ終わって持ち点が1点である事象をBとする。

$P(A) = \frac{7}{32}$ ((3)より)

$P(A\cap B) = 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{32}$ (下の表より)

コイン		点数	
○×	○○×	4	
	○×○	4	
	~~×○○~~		→ 3回目で0になるので不適
×○	○○×	4	
	○×○	4	
	~~×○○~~		→ 〃

従って，答えは

$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{32}}{\frac{7}{32}} = \frac{4}{7}$ 〃 $\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$

第4問

(1) $x = 2.\dot{3}\dot{6}$ より

$100\times x - x = 236.\dot{3}\dot{6} - 2.\dot{3}\dot{6}$

$100x - x = 234$

$99x = 234$

$x = \frac{234}{99}$ (← $2+3+4=9$ だから234は9で割り切れる！)

$= \frac{26}{11}$ 〃 $\frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$

(2) $y = 2.\dot{a}\dot{b}_{(7)}$ より

$49\times y - y = 2ab.\dot{a}\dot{b}_{(7)} - 2.\dot{a}\dot{b}_{(7)}$ (右辺を10進法に直す)

○ 条件付き確率…Aが起こったことがわかったとき，Bが起こる確率のこと。

$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

・52枚(ジョーカーは除く)のトランプのカードから，1枚引いたとき，そのカードが赤のマーク(ダイア or ハート)である事象をA，そのカードが♡のA(エース)である事象をBとする。

52枚から♡のAを引く確率は $P(A) = \frac{1}{52}$

引くときにチラッと赤いマークが見えたとき(♡か◇かは不明)それが♡のAである確率は？

この？が条件付き確率で，

$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ より

$P(A\cap B) = \frac{1}{52}$, $P(A) = \frac{26}{52}$

だから ♡A

$P_A(B) = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{26}{52}} = \frac{1}{26}$

赤

(赤が見えたので，赤26枚から♡Aを引くと考えてもOKです。)

⑭

$49y-y=\left(2\times 7^2+a\times 7+b\times 1+\frac{a}{7}+\frac{b}{7^2}+\cdots\right)$
$\qquad -\left(2\times 1+\frac{a}{7}+\frac{b}{7^2}+\cdots\right)$

・$2.ab_{(7)}$ を10進数に直すと
$2\times 1+\frac{a}{7}+\frac{b}{7^2}+\frac{a}{7^3}+\frac{b}{7^4}+\cdots$

$48y=2\times 7^2+a\times 7+b\times 1-2$
$\quad =98+7a+b-2$
$\quad =7a+b+96$

よって，$y=\frac{96+7\times a+b}{48}$ $\boxed{\text{オカ}}$ $\boxed{\text{キク}}$

(i) 条件より $96+7a+b=12\times$(奇数) が成り立つ．

$0\leqq a\leqq 6,\ 0\leqq b\leqq 6$ より
$0\leqq 7a+b\leqq 7\times 6+6=48$

← $0\leqq a\leqq 6,\ 0\leqq b\leqq 6$ から $96+7a+b$ の範囲をしぼる．

よって，$96\leqq 96+7a+b\leqq 96+48=144$

ゆえに $96\leqq 12\times$(奇数)$\leqq 144$

辺々を12で割って
$8\leqq$(奇数)$\leqq 12$

従って，(奇数)$=9,\ 11$

(奇数)$=9$ のとき
$y=\frac{12\times 9}{48}=\frac{9}{4}$ $\boxed{\text{ケ}}$

（このとき $96+7a+b=12\times 9=108$ より
$7a+b=12$
$a=1,\ b=5$
これは $a\neq b$ をみたす）

(奇数)$=11$ のとき
$y=\frac{12\times 11}{48}=\frac{11}{4}$ $\boxed{\text{コサ}}$

$y=\frac{\boxed{\text{コサ}}}{4}$ のとき $96+7a+b=12\times 11=132$ より
$7a+b=132-96=36$ $\boxed{\text{シス}}$

であるから，$0\leqq a\leqq 6,\ 0\leqq b\leqq 6,\ a\neq b$ より
($36=7\times 5+1$，7で割ると1余る)

$a=5,\ b=1$
$\boxed{\text{セ}}$ $\boxed{\text{ソ}}$

(ii) $y-2=\dfrac{96+7a+b}{48}-2$

$=\dfrac{96+7a+b}{48}-\dfrac{96}{48}$

$=\dfrac{7a+b}{48}$

$48=2^4\times3$ だから，分母になりうるのは

2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48

このとき，$7a+b$の値は順に

24, 16, 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1

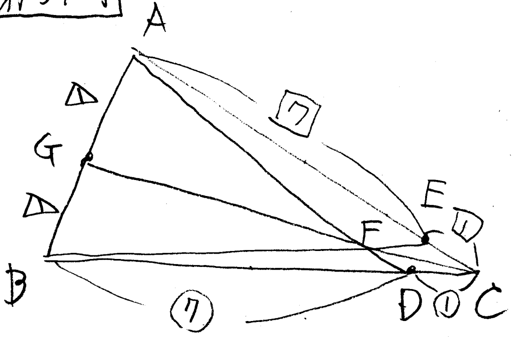
で，それぞれのa, bの値の組(a, b)は

$\cancel{(3,3)}$, $\cancel{(2,2)}$, $(1,5)$, $\cancel{(1,1)}$, $(0,6)$, $(0,4)$, $(0,3)$, $(0,2)$, $(0,1)$

$a\neq b$より，$\boxed{タ}$は 6個 である．

← $7a+b$は 7で割ると商がa，余りがbであるから，$7a+b=24$のとき $7\times3+3=24$ だから $a=3$, $b=3$, などとする．

$\boxed{第5問}$



チェバの定理により

$$\frac{AG}{GB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

$$\frac{AG}{GB}\cdot\frac{7}{1}\cdot\frac{1}{7}=1$$

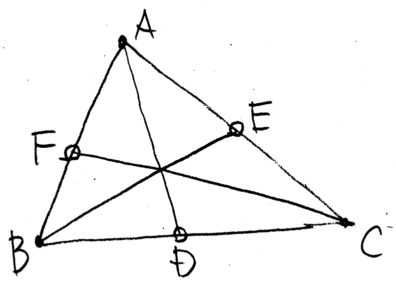
$$\frac{AG}{GB}=1$$

よって，$\dfrac{GB}{AG}=1$ $\boxed{ア}$

△BCFでメネラウスの定理を用いると

$$\frac{CB}{BD}\cdot\frac{DF}{FA}\cdot\frac{AE}{EC}=1$$

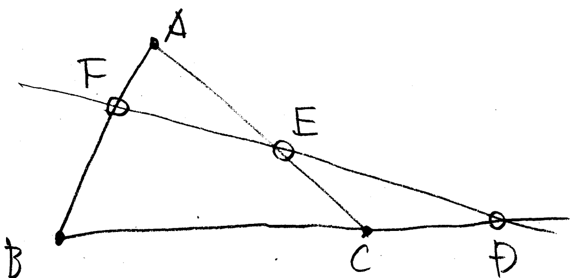
・チェバの定理



$$\frac{AF}{FB}\times\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}=1$$

（•と○を交互に進めばどの順でもよい）

・メネラウスの定理



$$\frac{AF}{FB}\times\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}=1$$

（•から始めて，交互に進めばどの順でもよい）

$$\frac{8}{\cancel{7}_{1}}\cdot\frac{DF}{FA}\cdot\frac{\cancel{7}^{1}}{1}=1$$

$$\frac{DF}{FA}=\underline{\frac{1}{8}}\ \ \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

△ABDでメネラウスの定理を用いると

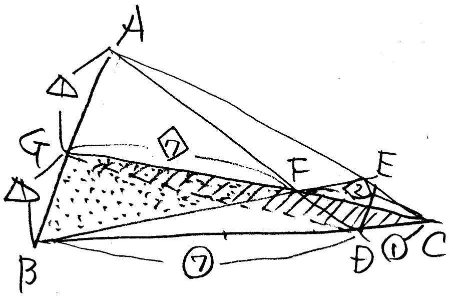
$$\frac{BA}{AG}\cdot\frac{GF}{FC}\cdot\frac{CD}{DB}=1$$

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{GF}{FC}\cdot\frac{1}{7}=1$$

$$\frac{GF}{FC}=\frac{7}{2}$$

よって

$$\frac{FC}{GF}=\underline{\frac{2}{7}}\ \ \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$



△CDG, △BFGの面積を△BCGの面積S

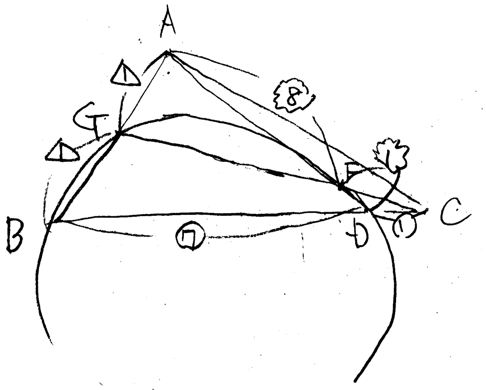
で表すと

$$\triangle CDG=\frac{1}{7+1}\triangle BCG=\frac{1}{8}S$$

$$\triangle BFG=\frac{7}{7+2}\triangle BCG=\frac{7}{9}S$$

よって

$$\frac{\triangle CDG\text{の面積}}{\triangle BFG\text{の面積}}=\frac{\frac{1}{8}S}{\frac{7}{9}S}=\frac{1}{8}\times\frac{9}{7}=\underline{\frac{9}{56}}\ \ \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}$$



$FD=1$ と $\dfrac{FD}{AF}=\dfrac{1}{8}$ より $AF=8$

$AB=x$ とおくと $AG:GB=1:1$ より

$AG=\dfrac{x}{2}$

方べきの定理より

$$AG\cdot AB=AF\cdot AD$$

$$\frac{x}{2}\cdot x=8\cdot 9\ (=72)$$

$$x^2=2\cdot 8\cdot 9=2^4\cdot 3^2$$

$x>0$ より $x=2^2\cdot 3=12$

よって、$AB=\underline{12}$ $\boxed{ケコ}$

$AE=3\sqrt{7}$ とすると、$AE:EC=7:1$ より

$3\sqrt{7}:EC=7:1$

よって、$7EC=3\sqrt{7}$

$$EC=\frac{3\sqrt{7}}{7}$$

従って、$AC=3\sqrt{7}+\dfrac{3\sqrt{7}}{7}=\dfrac{24\sqrt{7}}{7}$

ゆえに、$AE\cdot AC=3\sqrt{7}\cdot\dfrac{24\sqrt{7}}{7}=\underline{72}$ $\boxed{サシ}$

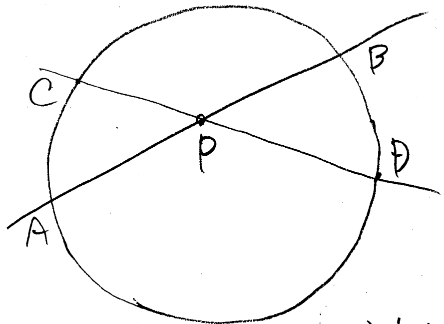
すると $AG\cdot AB=AE\cdot AC$ が成り立つことから、方べきの定理の逆より、4点 B, C, E, G は同一円周上にある。よって、内接四角形の性質より

$$\angle AEG=\angle GBC=\angle ABC$$

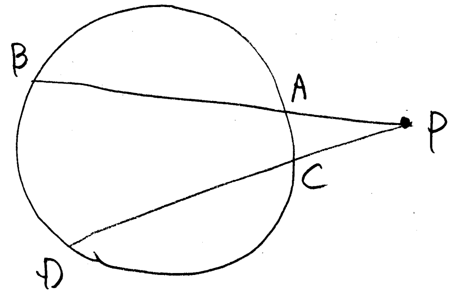
よって、$\boxed{ス}$ は $\underline{②}$ $\boxed{ス}$

（以上）

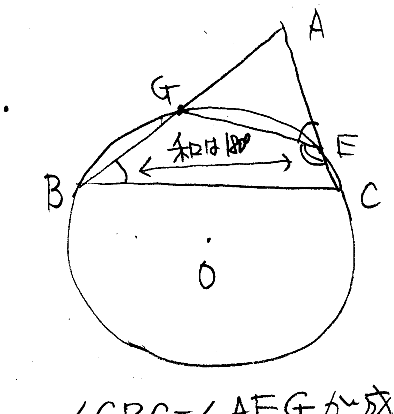
・方べきの定理



$PA\cdot PB=PC\cdot PD$ が成り立つ
（交点Pから始めよ！）



$PA\cdot PB=PC\cdot PD$
（交点Pから始めよ！）



$\angle GBC=\angle AEG$ が成り立つ

（円に内接するとき、向かい合う角の和は180°だから）