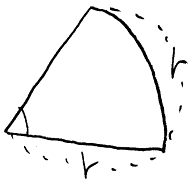
平成30年度センター試験 数学解答

第1問

[1]

(1) 1ラジアンの定義です.



半径＝弧長である

扇形の中心角なので

② $\boxed{ア}$

(2) 180° で π ラジアンなので

$180 : \pi = 144 : x$

$180x = 144\pi$

$x = \frac{144}{180}\pi$ （とりあえず9で約分）

$= \frac{16}{20}\pi$

$= \frac{4}{5}\pi$ $\frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$

$180 : \pi = x : \frac{23}{12}\pi$ より

$\pi x = \cancel{180}^{15} \times \frac{23}{\cancel{12}_{1}}\pi$

$x = 15 \times 23$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 23 \\ \hline 45 \\ 30 \\ \hline \end{array}$$

$= 345°$ $\boxed{エオカ}$ °

(3) $\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ のとき

$2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{5}\right) - 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{30}\right) = 1 \cdots ①$

$x = \theta + \frac{\pi}{5}$ とおくと, ①は

$2\sin x - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{30}\right) = 1$

$2\sin x - 2\cos\left(x - \frac{6}{30}\pi + \frac{\pi}{30}\right) = 1$

$2\sin x - 2\cos\left(x - \frac{5}{30}\pi\right) = 1$

$2\sin x - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ $\boxed{キ}$

［加法定理

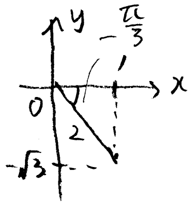
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$ ］

$2\sin x - 2\left(\cos x \cos\frac{\pi}{6} + \sin x \sin\frac{\pi}{6}\right) = 1$

$2\sin x - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) = 1$

$2\sin x - \sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$

$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$ $\boxed{ク}$



$2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$\boxed{ケ}$ $\boxed{コ}$

$x - \frac{\pi}{3} = \left(\theta + \frac{\pi}{5}\right) - \frac{\pi}{3}$

$= \theta + \frac{3}{15}\pi - \frac{5}{15}\pi$

$= \theta - \frac{2}{15}\pi$

と $\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ より

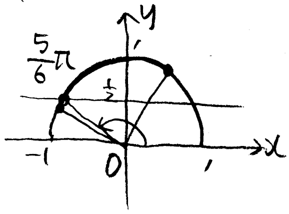
$\frac{\pi}{2} - \frac{2}{15}\pi \leqq x - \frac{\pi}{3} \leqq \pi - \frac{2}{15}\pi$

$(90° - 24°)$ $(180° - 24°)$

$\frac{11}{30}\pi \leqq x - \frac{\pi}{3} \leqq \frac{13}{15}\pi$

(3)のつづき

$\frac{\pi}{6} < \frac{11}{30}\pi$, $\frac{5}{6}\pi < \frac{13}{15}\pi$ だから



$x - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi$

$x = \frac{5}{6}\pi + \frac{\pi}{3}$

$x = \frac{5}{6}\pi + \frac{2}{6}\pi$

よって, $x = \frac{7}{6}\pi$

$\theta + \frac{\pi}{5} = \frac{7}{6}\pi$

$\theta = \frac{7}{6}\pi - \frac{\pi}{5}$

$= \frac{35}{30}\pi - \frac{6}{30}\pi$

$= \frac{29}{30}\pi$ $\frac{\boxed{サシ}}{\boxed{スセ}}$

〔2〕 $c>0$ とする.

$x^{\log_3 x} \geq \left(\frac{x}{c}\right)^3$ …②

3を底とする②の両辺の対数をとると

$\log_3 x^{\log_3 x} \geq \log_3 \left(\frac{x}{c}\right)^3$

[底$3>1$だから不等号の向きはそのまま]

$\log_3 x \cdot \log_3 x \geq 3\log_3 \frac{x}{c}$

$(\log_3 x)^2 \geq 3(\log_3 x - \log_3 c)$

$t = \log_3 x$ とおくと

$t^2 \geq 3(t - \log_3 c)$

$t^2 \geq 3t - 3\log_3 c$

$t^2 - 3t + 3\log_3 c \geq 0$ …③

$\boxed{ソ}$ $\boxed{タ}$

$c = \sqrt[3]{9}$ のとき, ③により

$t^2 - 3t + 3\log_3 \sqrt[3]{9} \geq 0$

$t^2 - 3t + 3\log_3 3^{\frac{2}{3}} \geq 0$

$t^2 - 3t + 3 \cdot \frac{2}{3}\log_3 3 \geq 0$

$t^2 - 3t + 2 \geq 0$

$(t-1)(t-2) \geq 0$

$t \leq 1$, $2 \leq t$

$\boxed{チ}$ $\boxed{ツ}$

$\log_3 x \leq 1$, $2 \leq \log_3 x$ と 真数 $x>0$ とから

「$x \leq 3^1$ または $3^2 \leq x$」

かつ $x > 0$

よって, $0 < x \leq 3$, $9 \leq x$

$\boxed{テ}$ $\boxed{ト}$ $\boxed{ナ}$

$x>0$ のとき $t = \log_3 x$ のとり得る値の範囲は実数全体だから ② $\boxed{ニ}$

この範囲のtに対して, ③がつねに成り立つための必要十分条件は

[2]のつづき

(③の判別式) $=(-3)^2-4\cdot1\cdot3\log_3 c \leqq 0$

よって，$9-12\log_3 c \leqq 0$

$-12\log_3 c \leqq -9$

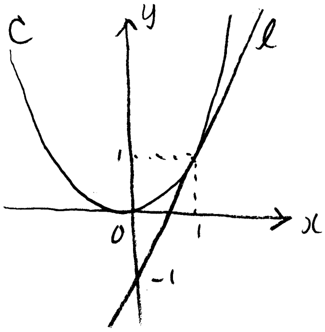
$\log_3 c \geqq \dfrac{9}{12}=\dfrac{3}{\underline{4}}$ $\dfrac{\boxed{ヌ}}{\boxed{ネ}}$

底 $3>1$ だから

$c \geqq 3^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{3^3}=\underline{\sqrt[4]{27}}$

$\boxed{ノ}$ $\boxed{ハヒ}$

$\boxed{第2問}$



$p>0$ とする．

$y=px^2+qx+r$

$y'=2px+q$ …①

(1) 接線ℓの傾きは $\underline{2}$ $\boxed{ア}$ であることから，

①で $x=1$ のとき $y'=2p+q$ より

$2p+q=2$

よって，$q=\underline{-2}p+\underline{2}$ $\boxed{イウ}$, $\boxed{エ}$ …②

Cは点Aを通るから

$1=p+q+r$ …… ③

②を③に代入して

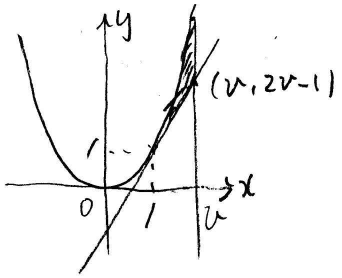
$1=p+(-2p+2)+r$

$1=-p+2+r$

よって，$-r=-p+2-1$

$r=p-\underline{1}$ $\boxed{オ}$

(2) $v>1$ とする．



$y=px^2+qx+r$ と $y=2x-1$ は

$x=1$ なる点で接するから

$px^2+qx+r-(2x-1)=p(x-1)^2$

と変形できる．

$S=\displaystyle\int_1^v \{px^2+qx+r-(2x-1)\}dx$

$=\displaystyle\int_1^v p(x-1)^2dx$

$=\left[\dfrac{p}{3}(x-1)^3\right]_1^v$

$=\dfrac{p}{3}(v-1)^3$

$=\dfrac{p}{\underline{3}}(v^3-\underline{3}v^2+\underline{3}v-\underline{1})$

$\boxed{カ}$ $\boxed{キ}$ $\boxed{ク}$ $\boxed{ケ}$

また，台形の面積の公式から

$T=\dfrac{1}{2}\{(2v-1)+1\}\cdot(v-1)$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 2v(v-1)$

$=\underline{v^2-v}$ $\boxed{コ}$

$\boxed{第2問}$ のつづき

$U = S - T$

$= \frac{p}{3}(v-1)^3 - (v^2 - v)$

$\frac{dU}{dv} = 3\cdot\frac{p}{3}(v-1)^2 - 2v + 1$

$= p(v-1)^2 - 2v + 1$

$v=2$ のとき $\frac{dU}{dv}=0$ であることが必要.

よって, $p(2-1)^2 - 2\cdot 2 + 1 = 0$

$p - 4 + 1 = 0$

$p = \underline{3}$ $\boxed{サ}$

[答えが1つなので十分性の確認
or 穴埋め
は不要でしょう.]

このとき

$U = \frac{3}{3}(v-1)^3 - v(v-1)$ …④

$= (v-1)^3 - v(v-1)$

$= (v-1)\{(v-1)^2 - v\}$

$= (v-1)(v^2 - 3v + 1)$

$U=0$ のとき, $v>1$ より

$v^2 - 3v + 1 = 0$

$v = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$v>1$ より $v = \underline{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ $\frac{\boxed{シ}+\sqrt{\boxed{ス}}}{\boxed{セ}}$

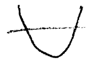
$\frac{dU}{dv} = 3(v-1)^2 - 2v + 1$

$= 3(v^2 - 2v + 1) - 2v + 1$

$= 3v^2 - 8v + 4$

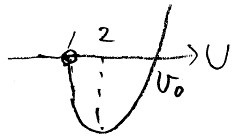
$= (v-2)(3v-2)$

$\begin{array}{ccc} 1 & -2 & \to -6 \\ 3 & -2 & \to -2 \\ \hline & & -8 \end{array}$



v	…	$\frac{2}{3}$	…	2	…
$\frac{dU}{dv}$	$+$	0	$-$	0	$+$
U	↗		↘		↗

$v>1$ のとき, 下のグラフのようになるから



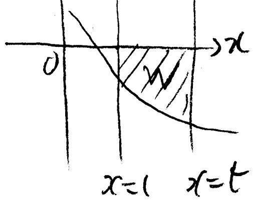
$1<v<v_0$ のとき
常に負の値のみをとる. $\underline{③}$ $\boxed{ソ}$

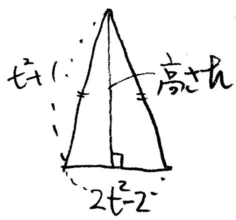
$p=3$ のとき, $v>1$ における U の最小値は, 極小値と一致するから,

④に $v=2$ を代入して

$U = 1^3 - 2\cdot 1 = \underline{-1}$ $\boxed{タチ}$

[2]





二等辺三角形の高さを h とすると
三平方の定理より

[2]のつづき

$h^2+(t^2-1)^2=(t^2+1)^2$

$h^2=(t^2+1)^2-(t^2-1)^2$

$=(t^4+2t^2+1)-(t^4-2t^2+1)$

$=4t^2$

$h>0,\ t>0$ より

$h=2t$

よって、条件より

$-\int_1^t f(x)dx=\frac{1}{2}\cdot(2t^2-2)\cdot 2t$

$-\int_1^t f(x)dx=2t^3-2t$

$\int_1^t f(x)dx=-2t^3+2t$

両辺をtで微分すると

$f(t)=\underline{-6}t^2\underline{+2}$

$\boxed{トナ}$, $\boxed{ニ}$, $\boxed{ヌ}$

$\boxed{ツ}$, $\boxed{テ}$ は

$F(x)=\int f(x)dx$ より

$F'(x)=f(x)$ ⑦ $\boxed{ツ}$

$W=-\int_1^t f(x)dx$

$=-[F(x)]_1^t$

$=-(F(t)-F(1))$

$=-F(t)+F(1)$ ④ $\boxed{テ}$

$\boxed{第3問}$

$a_4=30$ …①

$a_1+a_2+\cdots+a_8=288$ …②

$b_2=36$ …③

$b_1+b_2+b_3=156$ …④

(1) 数列$\{a_n\}$の公差をdとすると

①より $a_1+3d=30$ …⑤

②より $\frac{8}{2}(2a_1+7d)=288$ …⑥

⑥より $4(2a_1+7d)=288$

(÷4) $2a_1+7d=72$ …⑥'

⑥'−⑤×2より $d=\underline{12}$ $\boxed{ウエ}$

$2a_1+7d=72$
$2a_1+6d=60$
$d=12$

⑤に代入して

$a_1+3\cdot12=30$

$a_1+36=30$

$a_1=\underline{-6}$ $\boxed{アイ}$

$S_n=\frac{n}{2}\{2\cdot(-6)+(n-1)\cdot12\}$

$=\frac{n}{2}(-12+12n-12)$

$=\frac{n}{2}(12n-24)$

$=\underline{6}n^2\underline{-12}n$

$\boxed{オ}$ $\boxed{カキ}$

(2) 数列$\{b_n\}$の公比をrとする。
$r>1$ である。

③より $b_1r=36$ …⑦

(2)のつづき

④より　$b_1+b_1r+b_1r^2=156$

$b_1(1+r+r^2)=156 \cdots ⑧$

$\frac{⑧}{⑦}$より　$\frac{b_1(1+r+r^2)}{b_1r}=\frac{156}{36}$

$\frac{1+r+r^2}{r}=\frac{13}{3}$

$3(1+r+r^2)=13r$

$3+3r+3r^2=13r$

$3r^2-10r+3=0$

$1 \times -3 \to -9$
$3 \times -1 \to -1$
-10

$(r-3)(3r-1)=0$

$r=3, \frac{1}{3}$

$r>1$ より　$r=3$ $\boxed{コ}$

⑦に代入して

$b_1 \cdot 3=36$

$b_1=12$ $\boxed{クケ}$

r≠1より

$T_n=\frac{12(3^n-1)}{3-1}$

$=\frac{12(3^n-1)}{2}$

$=6(3^n-1)$

$\boxed{サ}$ $\boxed{シ}$ $\boxed{ス}$

(3)

$c_n=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(a_k-b_k)$

$=n(a_1-b_1)+(n-1)(a_2-b_2)+\cdots$

$+2(a_{n-1}-b_{n-1})+(a_n-b_n)$

$d_n=c_{n+1}-c_n$

$=(n+1)(a_1-b_1)+n(a_2-b_2)$

$+\cdots+3(a_{n-1}-b_{n-1})+2(a_n-b_n)$

$+(a_{n+1}-b_{n+1})$

$-\{n(a_1-b_1)+(n-1)(a_2-b_2)$

$+\cdots+2(a_{n-1}-b_{n-1})+(a_n-b_n)\}$

$=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots+(a_n-b_n)$

$+(a_{n+1}-b_{n+1})$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_{n+1})-(b_1+b_2+\cdots+b_{n+1})$

$=S_{n+1}-T_{n+1}$　⑤ $\boxed{セ}$

(1), (2)により

$d_n=6(n+1)(n+1-2)-6(3^{n+1}-1)$

$=6(n+1)(n-1)-6\cdot3^{n+1}+6$

$=6n^2-6-6\cdot3^{n+1}+6$

$=6n^2-6\cdot3^{n+1}$

$=6n^2-2\cdot3^{n+2}$　$\boxed{ソ}, \boxed{タ}, \boxed{チ}$

$n \geqq 2$ のとき

$c_n=c_1+\sum_{k=1}^{n-1}d_k$

(3)のつづき

$c_n=(a_1-b_1)+\sum_{k=1}^{n-1}(6k^2-2\cdot 3^{k+2})$

$=(-6-12)+6\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$

$-2\cdot\frac{27(3^{n-1}-1)}{3-1}$

$=-18+n(n-1)(2n-1)$

$-27(3^{n-1}-1)$

$=-18+n(2n^2-3n+1)$

$-3^3\cdot(3^{n-1}-1)$

$=-18+2n^3-3n^2+n-3^{n+2}+27$

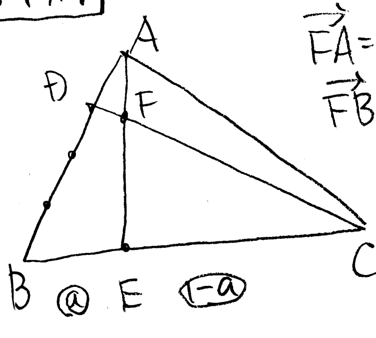
$=\underline{2}n^3-\underline{3}n^2+n+\underline{9}-3^{n+2}$

ナ　ニ　ヌ　ネ

ここで，$c_1=a_1-b_1=-6-12=\underline{-18}$

ツテト

第4問



$\vec{FA}=\vec{p}$，
$\vec{FB}=\vec{q}$
$\vec{FC}=\vec{r}$

(1) $\vec{AB}=\vec{FB}-\vec{FA}=\underline{\vec{q}-\vec{p}}$ ② ア

$|\vec{AB}|^2=|\vec{q}-\vec{p}|^2=|\vec{q}|^2-\underline{2}\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{p}|^2$ …①

イ

(2) $\vec{FD}=\frac{3\vec{FA}+\vec{FB}}{1+3}$

$=\underline{\frac{3}{4}}\vec{p}+\underline{\frac{1}{4}}\vec{q}$　$\frac{ウ}{エ}$，$\frac{オ}{カ}$ …②

(3) $\vec{FD}=s\vec{r}$，$\vec{FE}=t\vec{p}$ とする.

②より　$\frac{3}{4}\vec{p}+\frac{1}{4}\vec{q}=s\vec{r}$

$3\vec{p}+\vec{q}=4s\vec{r}$

$\vec{q}=\underline{-3}\vec{p}+\underline{4}s\vec{r}$ …③

キク　ケ

$\vec{FE}=t\vec{p}$ から

$(1-a)\vec{FB}+a\vec{FC}=t\vec{p}$

$(1-a)\vec{q}+a\vec{r}=t\vec{p}$

$(1-a)\vec{q}=t\vec{p}-a\vec{r}$

$1-a\neq 0$ より

$\vec{q}=\underline{\frac{t}{1-a}}\vec{p}-\underline{\frac{a}{1-a}}\vec{r}$ …④

コ サ　シ

$\vec{p}$，$\vec{r}$ は1次独立だから

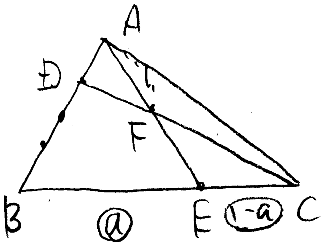
$-3=\frac{t}{1-a}$，$4s=-\frac{a}{1-a}$

よって，

$s=\underline{\frac{-a}{4(1-a)}}$，$t=\underline{-3}(1-a)$

ソ，スセ　タチ

(4) $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BE}|$ とする



$|\vec{p}|=1$ のとき, ① により

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{q}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{q}+1^2$$
$$=1-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$$

また

$$|\overrightarrow{BE}|^2=|\overrightarrow{FE}-\overrightarrow{FB}|^2$$
$$=|t\vec{p}-\vec{q}|^2$$
$$=|-3(1-a)\vec{p}-\vec{q}|^2$$
$$=9(1-a)^2|\vec{p}|^2$$
$$+6(1-a)\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$$
$$=\underbrace{9}_{\boxed{ツ}}(1-a)^2+\underbrace{6}_{\boxed{テ}}(1-a)\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$$

従って,

$$1-2\vec{p}\cdot\vec{q}+\cancel{|\vec{q}|^2}=9(1-a)^2+6(1-a)\vec{p}\cdot\vec{q}$$
$$+\cancel{|\vec{q}|^2}$$

$$-2\vec{p}\cdot\vec{q}-6(1-a)\vec{p}\cdot\vec{q}=9(1-a)^2-1$$

$$(6a-8)\vec{p}\cdot\vec{q}=9a^2-18a+8$$

$$2(3a-4)\vec{p}\cdot\vec{q}=(3a-2)(3a-4)$$

3	2	-6
3	4	-12
		-18

$3a-4\neq 0$ より

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=\frac{3a-2}{2}\qquad \frac{\boxed{トナ}-\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$$

(以上)

毎年のことですが, ウンザリするほどの計算量です。私が受験生でなくてよかったと正直に思います.
受験生, がんばれ!!

$\boxed{第5問}$ は後日.