2017年1月15日(日)実施

数学II・数学B

第1問（配点30）

〔1〕

$$\begin{cases} \cos 2\alpha + \cos 2\beta = \dfrac{4}{15} & \cdots\cdots ① \\ \cos\alpha \cdot \cos\beta = -\dfrac{2\sqrt{15}}{15} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

ただし，$0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$，

$\alpha < \beta$，かつ

$|\cos\alpha| \geqq |\cos\beta| \cdots\cdots ③$

①から $(2\cos^2\alpha - 1) + (2\cos^2\beta - 1) = \dfrac{4}{15}$　　☆$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$$2\cos^2\alpha + 2\cos^2\beta = \frac{4}{15} + 2$$

両辺を2で割って

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \frac{2}{15} + 1 = \underline{\frac{17}{15}} \quad \frac{\boxed{アイ}}{\boxed{イウ}}\ (3)$$

また，②から

$$\cos^2\alpha\cos^2\beta = \left(-\frac{2\sqrt{15}}{15}\right)^2 = \frac{4\cdot 15}{15^2} = \underline{\frac{4}{15}} \quad \frac{\boxed{エ}}{15}\ (2)$$

よって，$\cos^2\alpha$, $\cos^2\beta$ は x の2次方程式

$$x^2 - \frac{17}{15}x + \frac{4}{15} = 0 \Leftrightarrow 15x^2 - 17x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)(5x-4) = 0$$

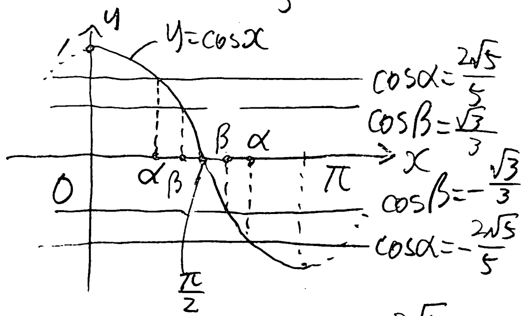
$$\begin{array}{ccccc} 3 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & -1 & \rightarrow & -5 \\ 5 & & -4 & \rightarrow & -12 \\ \hline & & & & -17 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}, \frac{4}{5}$$

の2解である。③より $\cos^2\alpha \geqq \cos^2\beta$ だから

$$\cos^2\alpha = \underline{\frac{4}{5}},\quad \cos^2\beta = \underline{\frac{1}{3}} \quad \frac{\boxed{オ}}{\boxed{キ}}, \frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\ (各3)$$

よって，$\cos\alpha = \pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



$\alpha < \beta$ だから $\cos\alpha = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ は却下

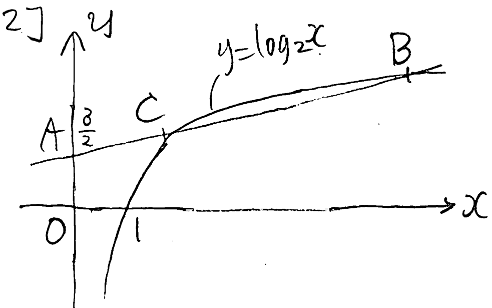
よって，$\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　$\dfrac{\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}}$　(2)

②より $\cos\alpha\cos\beta < 0$

よって，$\cos\beta < 0$

従って，$\cos\beta = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}$　$\dfrac{\boxed{ス}\sqrt{\boxed{セ}}}{\boxed{ソ}}$　(2)

[2]



$A\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$，$B(p, \log_2 p)$，$C(q, \log_2 q)$

真数は正だから　$p>0$，$q>0$　$\boxed{タ}$　(2)

点Cの座標は内分点の公式を用いて

$\left(\dfrac{2\cdot 0 + 1\cdot p}{1+2}, \dfrac{2\cdot\frac{3}{2} + 1\cdot\log_2 p}{1+2}\right)$

すなわち

$\left(\dfrac{1}{3}p, \dfrac{1}{3}\log_2 p + 1\right)$　$\dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$，$\dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$，$\boxed{ナ}$．(各2)

よって、

$$\begin{cases} \frac{1}{3}p = q \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ④ \\ \frac{1}{3}\log_2 p + 1 = \log_2 q \quad \cdots ⑤ \end{cases}$$

⑤より、$\log_2 p + 3 = 3\log_2 q$

$\Leftrightarrow \log_2 p + \log_2 2^3 = \log_2 q^3$

$\Leftrightarrow \log_2 p \cdot 2^3 = \log_2 q^3$

$\Leftrightarrow 8p = q^3$

$\Leftrightarrow \underline{p = \frac{1}{8}q^3}$ $\frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} q^{\boxed{\text{ネ}}}$ (3)

$\cdots ⑥$

④より $p = 3q \cdots ④'$

これを⑥に代入して

$3q = \frac{1}{8}q^3$

$\Leftrightarrow q^3 = 24q$

$q \neq 0$ だから両辺を q で割って

$q^2 = 24$

$q > 0$ より $q = \sqrt{24} = \underline{2\sqrt{6}}$ $\boxed{\text{ヒ}}\sqrt{\boxed{\text{フ}}}$ (2)

④'に代入して $p = 3 \cdot 2\sqrt{6} = \underline{6\sqrt{6}}$ $\boxed{\text{ノ}}\sqrt{\boxed{\text{ハ}}}$ (2)

Cの y 座標は

$\log_2 q = \log_2 2\sqrt{6} = \log_2 2 + \log_2 \sqrt{6}$

$= 1 + \frac{1}{2}\log_2 6 = 1 + \frac{1}{2}(\log_2 2 + \log_2 3)$

$= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}\right)$

$= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{0.4771}{0.3010}\right)$

$= 1 + \frac{1}{2}(1 + 1.585)$

$= 1 + \frac{1}{2} \cdot 2.585$

$= 1 + 1.292$

$= 2.29$

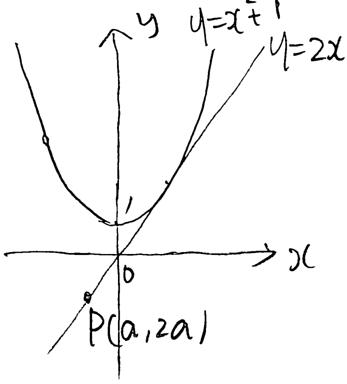
$\fallingdotseq \underline{2.3}$　⑥ $\boxed{ヘ}$ (2)

第2問（配点 30）

$C: y = x^2 + 1$, $P(a, 2a)$

点Pは直線 $y = 2x$ 上にあり,

また, $y = 2x$ は点 $(1, 2)$ で C に接している.



(1) $y = x^2 + 1$ について, $y' = 2x$

従って, C 上の点 (t, t^2+1) における接線の方程式は

$y = 2t(x - t) + t^2 + 1$

$\Leftrightarrow y = 2tx - 2t^2 + t^2 + 1$

$\Leftrightarrow y = \underset{\substack{\boxed{ア}\\(2)}}{\underline{2}}tx - t^2 + \underset{\substack{\boxed{イ}\\(1)}}{\underline{1}}$ （2txの2を忘れないように!）

この直線が点$P(a, 2a)$を通るとき

$2a = 2t\cdot a - t^2 + 1$

$\Leftrightarrow t^2 - \underline{2}at + \underline{2}a - \underline{1} = 0$

$\boxed{ウ}$ $\boxed{エ}$ $\boxed{オ}$ (2)

$\Leftrightarrow (t-1)\{t-(2a-1)\} = 0$

$$\begin{array}{r} -(2a-1) \\ -1 \\ \hline -2a \end{array}$$

$\Leftrightarrow t = \underline{2}a - \underline{1}, \underline{1}$

$\boxed{カ}$ $\boxed{キ}$ $\boxed{ク}$ (1), (1)

$2a-1 \neq 1 \Leftrightarrow 2a \neq 2$

$\Leftrightarrow a \neq \underline{1}$ $\boxed{ケ}$ (1)

のとき，Pを通るCの接線は2本あり，

それらの方程式は

$t = 2a-1$のとき

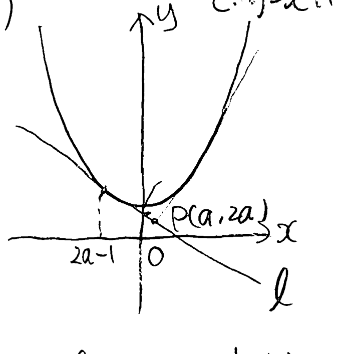
$y = 2(2a-1)x - (2a-1)^2 + 1$

$\Leftrightarrow y = (\underline{4}a - \underline{2})x \underline{-4}a^2 \underline{+4}a$ $\boxed{コ}$, $\boxed{サ}$, $\boxed{シ}$, $\boxed{ス}$ (2)

$t = 1$のとき

$y = \underline{2}x$ $\boxed{セ}$ (2)

(2)



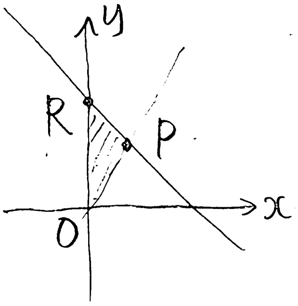
rはlのy切片だから

$r = -4a^2 + 4a$

$r > 0$となるのは $-4a^2 + 4a > 0$

-4で割ると $a^2 - a < 0$ (向きが変わる!)

$a(a-1)<0 \Leftrightarrow \underline{0}<a<\underline{1}$ $\boxed{ソ}, \boxed{タ}$ (2)



$S = \triangle OPR$

$= \frac{1}{2} \cdot \overline{OR} \cdot$ (Pのx座標)

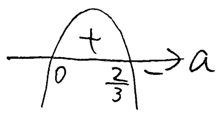
$= \frac{1}{2}(-4a^2+4a) \cdot a$

$= -2a^3+2a^2$

$= 2(a^2-a^3)$ $\boxed{チ}(a^{\boxed{ツ}}-a^{\boxed{テ}})$ (3)

$\frac{dS}{da} = -6a^2+4a$

$= -2a(3a-2)$



a	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$\frac{dS}{da}$		+	0	−	
S		↗		↘	

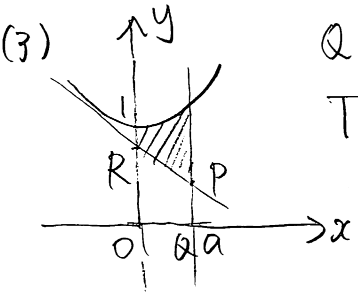
よって，Sは$a = \underline{\frac{2}{3}}$のとき $\frac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}$ (3)

最大値 $2\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^3\right\}$

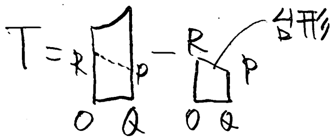
$= 2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)$

$= 2 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \underline{\frac{8}{27}}$ $\frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌネ}}$ (3)

(3)



Q$(a, 0)$とすると，



$= \int_0^a (x^2+1)\,dx - \frac{1}{2}(OR+QP) \cdot OQ$

$= \left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^a - \frac{1}{2}\{(-4a^2+4a)+2a\} \cdot a$

$= \frac{1}{3}a^3+a-\frac{1}{2}(-4a^3+6a^2)$

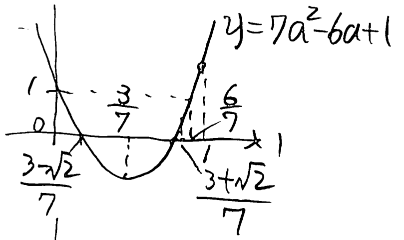
$=\frac{1}{3}a^3+a+2a^3-3a^2$

$=\underline{\frac{7}{3}}a^3-\underline{3}a^2+\underline{a}$ $\quad \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}, \boxed{\text{ヒ}}, \boxed{\text{フ}}$

※この $\boxed{\text{フ}}$ が強烈。数字じゃないので検算を余儀なくされた人が多かったのでは。出題者の人柄が露呈した問題。

$\frac{dT}{da}=7a^2-6a+1 \left(=7\left(a-\frac{3}{7}\right)^2-\frac{2}{7}\right)$

$\frac{dT}{da}=0$ を解くと $a=\frac{3\pm\sqrt{2}}{7}$



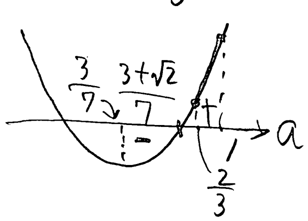
$a=\frac{2}{3}$ を $\frac{dT}{da}$ に代入すると

$7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-6\cdot\frac{2}{3}+1$

$=\frac{28}{9}-4+1=\frac{28}{9}-3$

$=\frac{1}{9}>0$

よって、$\frac{2}{3}\leqq a<1$ のとき $\frac{dT}{da}>0$



従って、Tは<u>増加する</u>。

② $\boxed{\text{ヘ}}$ (3)

第3問（配点 20）

(1) $s_1=1, s_2=2, s_3=4$ であるから

$s_1s_2s_3=1\cdot2\cdot4=\underline{8}$ $\boxed{ア}$ (2)

$s_1+s_2+s_3=1+2+4=\underline{7}$ $\boxed{イ}$ (2)

(2) $s_n=x\cdot r^{n-1}$

$s_1s_2s_3=x\cdot xr\cdot xr^2=a^3$

$\Leftrightarrow x^3r^3=a^3$

x, r, a は実数だから

$xr=\underline{a}$ $\boxed{ウ}$ (2) $\cdots$ ③

$s_1+s_2+s_3=x+xr+xr^2=b\cdots$ ②

$\Leftrightarrow x(1+r+r^2)=b\cdots\cdots$ ②′

③÷②′より

$$\frac{\cancel{x}(1+r+r^2)}{\cancel{x}r}=\frac{b}{a}$$

$\Leftrightarrow a(1+r+r^2)=br$

$\Leftrightarrow \underline{a}r^2+(\underline{a}-\underline{b})r+\underline{a}=0\cdots$ ④

$\boxed{エ}$ $\boxed{オ}$ $\boxed{カ}$ $\boxed{キ}$ (3)

④を満たす実数 r が存在するので
④の判別式を D とすると

$D=(a-b)^2-4a\cdot a\geqq0$

$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2-4a^2\geqq0$

$\Leftrightarrow -3a^2-2ab+b^2\geqq0$

$\Leftrightarrow \underline{3}a^2+\underline{2}ab-b^2\leqq0$

$\boxed{ク}$ $\boxed{ケ}$ (2)

(3) $a=64, b=336$ のとき

④に代入して

$64 r^2+(64-336)r+64=0$

$\Leftrightarrow 64r^2-272r+64=0$

$\Leftrightarrow 4r^2-17r+4=0$

$\Leftrightarrow (r-4)(4r-1)=0$

$\Leftrightarrow r=\frac{1}{4}, 4$

条件より $r>1$

よって $r=\underline{4}$ $\boxed{コ}$ (2)

また, ③より

$x\cdot 4=64$

$\Leftrightarrow x=\underline{16}$ $\boxed{サシ}$ (2)

$t_n=s_n\log_4 s_n \ (n=1,2,3,\cdots)$

とすると,

$s_n=xr^{n-1}=16\cdot 4^{n-1}=4^2\cdot 4^{n-1}$

$=4^{n+1}$

よって

$t_n=4^{n+1}\log_4 4^{n+1}$

$=4^{n+1}\cdot(n+1)\log_4 4$

$=(n+1)\cdot 4^{n+1}$

$\boxed{ス}$ $\boxed{セ}$ (2)

$U_n=2\cdot 4^2+3\cdot 4^3+4\cdot 4^4+\cdots+n\cdot 4^n+(n+1)4^{n+1}$

$-)\ 4U_n= \qquad 2\cdot 4^3+3\cdot 4^4+\cdots+(n-1)\cdot 4^n+n\cdot 4^{n+1}+(n+1)\cdot 4^{n+2}$

$-3U_n=2\cdot 4^2+(4^3+4^4+\cdots\cdots+4^{n+1})-(n+1)\cdot 4^{n+2}$

初項4^3, 公比4, 項数$(n+1)-3+1=n-1$

の等比数列の和

$=32+\frac{4^3(4^{n-1}-1)}{4-1}-(n+1)4^{n+2}$

$= 32 + \frac{1}{3}(4^{n-1+3} - 4^3) - (n+1)\cdot 4^{n+2}$

$= 32 + \frac{1}{3}\cdot 4^{n+2} - \frac{64}{3} - (n+1)\cdot 4^{n+2}$

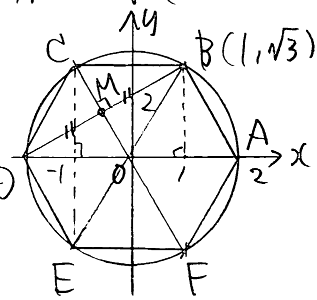
$= -(n+1-\frac{1}{3})4^{n+2} + \frac{32}{3}$

$= -\frac{3n+2}{3}\cdot 4^{n+2} + \frac{32}{3}$

よって

$\underline{U_n = \frac{3n+2}{9}\cdot 4^{n+2} - \frac{32}{9}}$　　$\frac{\boxed{ソ}n+\boxed{タ}}{\boxed{チ}}\cdot\boxed{コ}^{n+\boxed{ツ}} - \frac{\boxed{テト}}{\boxed{ナ}}$ (2), (2)

第4問（配点 20）



(1) B($\underline{1}$, $\underline{\sqrt{3}}$)，$\boxed{ア}$, $\sqrt{\boxed{イ}}$ (1)

　D($\underline{-1}$, 0)　$\boxed{ウ}$ (1)

(2) 図形の対称性により，点Mは線分OCの中点だから

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(-1, \sqrt{3}) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

よって，$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$

$= \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (2, 0)$

$= \left(\underline{-\frac{5}{2}}, \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$ $-\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}, \frac{\sqrt{\boxed{カ}}}{\boxed{キ}}$ (2)

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = (-1, \sqrt{3}) - (-2, 0)$

$= (\underline{1}, \underline{\sqrt{3}})$　$\boxed{ク}$, $\sqrt{\boxed{ケ}}$ (2)

従って

$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+r\overrightarrow{AM}$

$=(2,0)+r\left(-\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\left(2-\frac{5}{2}r,\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)\cdots①$

また

$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OD}+s\overrightarrow{DC}$

$=(-2,0)+s(1,\sqrt{3})$

$=(-2+s,\sqrt{3}s)\cdots②$

①,②は同じベクトルだから

$2-\frac{5}{2}r=-2+s\cdots③$

$\frac{\sqrt{3}}{2}r=\sqrt{3}s\cdots\cdots④$

④より $r=2s\cdots\cdots④'$

これを③に代入して

$2-\frac{5}{2}\cdot2s=-2+s$

$\Leftrightarrow 2-5s=-2+s$

$\Leftrightarrow 6s=4$

$\Leftrightarrow s=\frac{2}{3}$

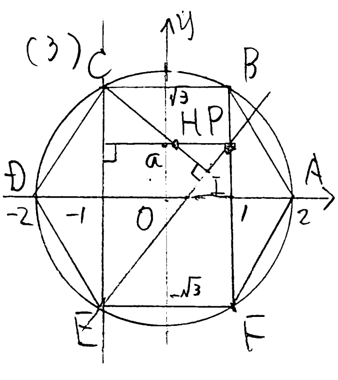
④'より $r=2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

よって,②より

$\overrightarrow{ON}=\left(-2+\frac{2}{3},\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}\right)$

$=\left(\underline{-\frac{4}{3}},\underline{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\right)$ $-\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}},\frac{\boxed{タ}\sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツ}}$ (2)

(3)



$\overrightarrow{OP}=(1,a)$, $\overrightarrow{OE}=(-1,-\sqrt{3})$より

$\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OE}=(1,a)-(-1,-\sqrt{3})$

$=(\underline{2},\underline{a+\sqrt{3}})$ $\boxed{テ}$, $\boxed{ト}+\sqrt{\boxed{ナ}}$ (2)

直線EPの傾きは $\frac{a+\sqrt{3}}{2}$

直線CHの傾きをmとすると，EP⊥CHより

$$\frac{a+\sqrt{3}}{2}\cdot m=-1 \Leftrightarrow m=-\frac{2}{a+\sqrt{3}}$$

☆ 垂直な2直線の傾きをm_1，m_2とすると

$$m_1m_2=-1$$

よって，直線CHの方程式は

$$y=-\frac{2}{a+\sqrt{3}}(x+1)+\sqrt{3} \cdots ⑤$$

☆ ベクトルを使うと，盛大なお祭りになります．後のほうでやっておきます．

点Hのy座標は$\underline{a}$ $\boxed{八}$ だから⑤にy=aを代入して

$$a=-\frac{2}{a+\sqrt{3}}(x+1)+\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow a(a+\sqrt{3})=-2(x+1)+\sqrt{3}(a+\sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)=-a(a+\sqrt{3})+\sqrt{3}(a+\sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)=-a^2+3$$

$$\Leftrightarrow x+1=\frac{-a^2+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{x=\frac{-a^2+1}{2}} \qquad \frac{\boxed{ニ}a^{\boxed{ヌ}}+\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}} \quad (3)$$

2直線OP，OHの傾きをそれぞれm_1，m_2とすると

$$m_1=a,\ m_2=\frac{a}{\frac{-a^2+1}{2}}=\frac{2a}{-a^2+1}$$

☆ $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OH}}{|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OH}|}$ ですが，このままやるとお祭りになります。後のほうでやっときます．

$\cos\theta=\frac{12}{13}>0$ より $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

$$\therefore \tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=\left|\frac{a-\frac{2a}{-a^2+1}}{1+a\cdot\frac{2a}{-a^2+1}}\right|$$

$$=\left|\frac{a(-a^2+1)-2a}{(-a^2+1)+2a^2}\right|=\left|\frac{-a^3-a}{a^2+1}\right|$$

$$=\left|\frac{a(a^2+1)}{a^2+1}\right|=|a|$$

また、$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$$\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}-1$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{12}{13}\right)^2}-1$$

$$=\frac{13^2}{12^2}-1$$

$$=\frac{13^2-12^2}{12^2}$$

$$=\frac{13+12}{12^2}=\frac{25}{12^2}$$

$\tan\theta>0$ より $\tan\theta=\dfrac{5}{12}$

よって、$|a|=\dfrac{5}{12}\iff \underline{a=\pm\dfrac{5}{12}}$ $\dfrac{\boxed{ヒ}}{\boxed{フヘ}}$ (3)

※ Hの座標をベクトルを用いて求めると、お祭りになります。

点Cから直線EPに下した垂線の足をI

とすると、

★ IはEP上にありますので、EI : IP = k : 1−k とします。

$$\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OE}+k\overrightarrow{EP}\quad(k\text{は実数})$$

$$=(-1,-\sqrt{3})+k(2,\ a+\sqrt{3})$$

$$=(2k-1,\ k(a+\sqrt{3})-\sqrt{3})$$

$$\therefore\ \overrightarrow{CI}=\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OC}$$

$$=(2k-1,\ k(a+\sqrt{3})-\sqrt{3})-(-1,\sqrt{3})$$

$$=(2k,\ k(a+\sqrt{3})-2\sqrt{3})$$

$\overrightarrow{EP}\perp\overrightarrow{CI}$ より $\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{CI}=0$

★ 垂直なベクトルの内積は0

よって、$(2,\ a+\sqrt{3})\cdot(2k,\ k(a+\sqrt{3})-2\sqrt{3})=0$

$$\iff 4k+\{k(a+\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}(a+\sqrt{3})\}=0$$

$$\iff k=\frac{2\sqrt{3}(a+\sqrt{3})}{(a+\sqrt{3})^2+4}$$

よって，

$$\overrightarrow{CI}=\left(\frac{4\sqrt{3}(a+\sqrt{3})}{(a+\sqrt{3})^2+4},\ \frac{2\sqrt{3}(a+\sqrt{3})^2}{(a+\sqrt{3})^2+4}-2\sqrt{3}\right)$$

$$=\left(\frac{4\sqrt{3}(a+\sqrt{3})}{(a+\sqrt{3})^2+4},\ \frac{-8\sqrt{3}}{(a+\sqrt{3})^2+4}\right)$$

そこで，$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{CI}$（$t$は実数）とおくと

$$\overrightarrow{OH}=(-1,\sqrt{3})+t\left(\frac{4\sqrt{3}(a+\sqrt{3})}{(a+\sqrt{3})^2+4},\ \frac{-8\sqrt{3}}{(a+\sqrt{3})^2+4}\right)$$

このy成分はaに等しいから

$$\sqrt{3}+t\cdot\frac{-8\sqrt{3}}{(a+\sqrt{3})^2+4}=a$$

$$\Leftrightarrow -8\sqrt{3}t=(a-\sqrt{3})\{(a+\sqrt{3})^2+4\}$$

$$\Leftrightarrow \quad t=-\frac{(a-\sqrt{3})\{(a+\sqrt{3})^2+4\}}{8\sqrt{3}}$$

よって，$\overrightarrow{OH}$のx成分は

$$-1+t\cdot\frac{4\sqrt{3}(a+\sqrt{3})}{(a+\sqrt{3})^2+4}$$

$$=-1-\frac{(a-\sqrt{3})\cancel{\{(a+\sqrt{3})^2+4\}}}{\cancel{8\sqrt{3}}\ 2}\cdot\frac{\cancel{4\sqrt{3}}^{1}(a+\sqrt{3})}{\cancel{(a+\sqrt{3})^2+4}}$$

$$=-1-\frac{(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})}{2}$$

$$=-1-\frac{a^2-3}{2}=\frac{-2-a^2+3}{2}$$

$$=\frac{-a^2+1}{2}$$ $\boxed{答}$

☆ $\cos\theta=\frac{12}{13}$ からベクトルを使ってaを求めてみます．

$\overrightarrow{OP}=(1,a)$, $\overrightarrow{OH}=\left(\frac{-a^2+1}{2}, a\right)$ より

$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{1+a^2}$

$|\overrightarrow{OH}|=\sqrt{\left(\frac{-a^2+1}{2}\right)^2+a^2}$

$=\sqrt{\frac{a^4-2a^2+1}{4}+a^2}=\sqrt{\frac{a^4+2a^2+1}{4}}$

$=\sqrt{\left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2}=\frac{a^2+1}{2}$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OH}=(1,a)\cdot\left(\frac{-a^2+1}{2}, a\right)$

$=1\cdot\frac{-a^2+1}{2}+a\cdot a$

$=\frac{-a^2+1}{2}+a^2$

$=\frac{a^2+1}{2}$

よって、$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OH}}{|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OH}|}$

$=\frac{\frac{a^2+1}{2}}{\sqrt{1+a^2}\cdot\frac{a^2+1}{2}}$

$=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$

これが $\frac{12}{13}$ に等しいから

$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{12}{13} \Leftrightarrow \sqrt{1+a^2}=\frac{13}{12}$

$\Leftrightarrow 1+a^2=\left(\frac{13}{12}\right)^2 \Leftrightarrow a^2=\left(\frac{13}{12}\right)^2-1$

$\Leftrightarrow a^2=\frac{13^2-12^2}{12^2}=\frac{(13-12)(13+12)}{12^2}=\frac{25}{12^2}$

$\Leftrightarrow a = \pm\dfrac{5}{12}$ $\boxed{答}$

意外にあっさりできました。
いずれにせよ, ここは直線の方程式がらみでやった方が単純明解だと思います.

第5問 (配点 20)

(1) Wは二項分布 $B(n, p)$に従うから

$$E(W) = np = m$$

$$V(W) = np(1-p) = \sigma^2$$

よって,

$$np = \frac{1216}{27} \cdots ①$$

$$np(1-p) = \frac{152^2}{27^2} \cdots ②$$

②÷①より

$$\frac{np(1-p)}{np} = \frac{\frac{152^2}{27^2}}{\frac{1216}{27}}$$

2) 1216
2) 608
2) 304
2) 152 !!
2) 76
2) 38
19

$$\Leftrightarrow 1-p = \frac{152^2}{27^2}\cdot\frac{27}{2^3\cdot 152}$$

$$\Leftrightarrow 1-p = \frac{152}{27}\cdot\frac{1}{8} = \frac{19}{27}$$

$$\Leftrightarrow p = 1-\frac{19}{27} = \underline{\frac{8}{27}} \quad \frac{\boxed{エ}}{\boxed{オカ}} \quad (3)$$

①に代入して $n\cdot\dfrac{8}{27} = \dfrac{2^3\cdot 152}{27}$

$$\Leftrightarrow n = \frac{2^3\cdot 152}{27}\cdot\frac{27}{8} = \underline{152} \quad \boxed{アイウ} \quad (3)$$

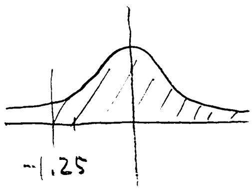
(2) $Z=\dfrac{W-m}{\sigma}$ は正規分布 $N(0,1)$ に従うとみなしてよい.

$$Z=\frac{W-m}{\sigma}=\frac{38-\frac{1216}{27}}{\frac{152}{27}}=\frac{27\cdot 38-1216}{152}$$

(各項を19で割ります)

$$=\frac{27\cdot 2-2^6}{8}=\frac{27-32}{4}=-\frac{5}{4}=\underline{-1.25}\quad -\boxed{キ}.\boxed{クケ}\ (3)$$

よって,



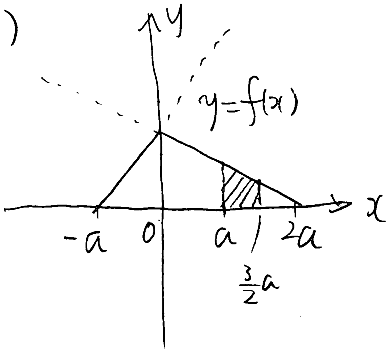
$P(Z\geqq -1.25)$

$=0.5+P(0\leqq Z\leqq 1.25)$

$=0.5+0.3944=0.8944$

$=\underline{0.89}\quad 0.\boxed{コサ}\ (3)$

(3)



$a\leqq X\leqq \frac{3}{2}a$ となる確率は

$\int_a^{\frac{3}{2}a} f(x)\,dx=$ (図の斜線部分の面積) ← 台形

$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}a-a\right)\cdot\left(f(a)+f\left(\frac{3}{2}a\right)\right)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}a\left\{\frac{1}{3a^2}(2a-a)+\frac{1}{3a^2}\left(2a-\frac{3}{2}a\right)\right\}$

$=\frac{1}{4}a\left(\frac{a}{3a^2}+\frac{1}{2\cdot 3a^2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\underline{\frac{1}{8}}\quad \frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}\ (2)$

Xの平均は

$$E(X)=\int_{-a}^{2a} xf(x)\,dx$$

☆$\frac{1}{6}$公式を使おう。

$$=\int_{-a}^{0}\frac{2}{3a^2}x(x+a)\,dx+\int_{0}^{2a}\frac{1}{3a^2}x(2a-x)\,dx$$

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

[マイナスに注意]

$$=-\frac{2}{3a^2}\cdot\frac{1}{6}(0+a)^3+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3a^2}(2a-0)^3$$

$$=-\frac{a}{9}+\frac{8a}{18}=\frac{3}{9}a=\underline{\frac{a}{3}}\quad\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$$

$$E(Y)=E(2X+7)$$

$$=2E(X)+7$$

$$=2\cdot\frac{a}{3}+7$$

$$=\underline{\frac{2a}{3}+7}\quad\frac{\boxed{タチ}}{\boxed{ツ}}+\boxed{テ}$$

(2) (1)

☆このあたりは数IAの方がはるかにむずかしい。どうなってるの？

(以上)