2017年1月15日(日)実施

数学I・数学A

第1問 (30)

[1] $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^2=x^2+2\cdot x\cdot\dfrac{2}{x}+\left(\dfrac{2}{x}\right)^2$

$=x^2+4+\dfrac{4}{x^2}$

$=\left(x^2+\dfrac{4}{x^2}\right)+4$

$=9+4$

$=\underline{13}$ $\boxed{アイ}$ (3)

であるから、$x+\dfrac{2}{x}=\sqrt{13}$ である.

[ふつうは、$x+\dfrac{2}{x}=\pm\sqrt{13}$ なのだが、

$x>0$ という条件があったので

$x+\dfrac{2}{x}>0$ より + の方を答えにする]

さらに

※ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$x^3+\dfrac{8}{x^3}=x^3+\left(\dfrac{2}{x}\right)^3$

$=\left(x+\dfrac{2}{x}\right)\left\{x^2-x\cdot\dfrac{2}{x}+\left(\dfrac{2}{x}\right)^2\right\}$

$=\left(x+\dfrac{2}{x}\right)\left(x^2-2+\dfrac{4}{x^2}\right)$

$=\left(x+\dfrac{2}{x}\right)\left\{\left(x^2+\dfrac{4}{x^2}\right)\underline{-2}\right\}$ $\boxed{ウ}$ (1)

$=\sqrt{13}\cdot(9-2)=\underline{7\sqrt{13}}$ $\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オカ}}$ (3)

また.

※ $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$x^4+\dfrac{16}{x^4}=(x^2)^2+\left(\dfrac{4}{x^2}\right)^2=\left(x^2+\dfrac{4}{x^2}\right)^2-2\cdot x^2\cdot\dfrac{4}{x^2}$

$= \left(x^2 + \dfrac{4}{x^2}\right)^2 - 8$

$= 9^2 - 8 = 81 - 8$

$= \underline{73}$ $\boxed{\text{キク}}$ (3)

[2]

$\boxed{\text{ケ}}$について

$q: x^2 = 1 \underset{\bigcirc}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} p: x = 1$

であるから，qはpであるための

必要条件だが十分条件でない $\underline{0}$ $\boxed{\text{ケ}}$ (1)

$\boxed{\text{コ}}$について

$\overline{p}: x \neq 1 \rightleftarrows q: x^2 = 1$

$x=1$でないとき必ず$x^2=1$か？そんなことはない

反例は$x=2$．よって$\overline{p} \nrightarrow q$

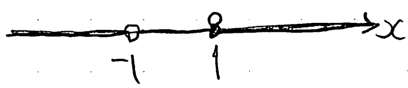
$x^2=1$のとき必ず$x \neq 1$か？そんなことはない．

反例は$x=1$．よって，$\overline{p} \nleftarrow q$

従って，必要条件でも十分条件でもない $\underline{3}$ $\boxed{\text{コ}}$ (2)

$\boxed{\text{サ}}$について

pまたは$\overline{q}$：$x=1$または$x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq -1$



であるから，

$(p$または$\overline{q}): x \neq -1 \rightleftarrows q: x^2 = 1$

$x=-1$でないとき必ず$x^2=1$か？そんなことはない．

反例は$x=0$．よって$(p$または$\overline{q}) \nrightarrow q$

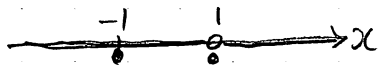
$x^2=1$ のとき必ず $x \neq -1$ か? そんなことはない.

反例は $x=-1$. よって, (pまたは$\bar{q}$) $\not\Leftarrow$ q

従って, 必要条件でも十分条件でもない. ③ $\boxed{サ}$ (2)

$\boxed{シ}$について

($\bar{p}$かつq): $x \neq 1$ かつ $x^2=1 \Leftrightarrow x=-1$



であるから

($\bar{p}$かつq): $x=-1 \;\substack{\Rightarrow \\ \not\Leftarrow}\; q: x^2=1$

従って, 十分条件だが必要条件でない ① $\boxed{シ}$ (2)

(2)

A:「(pかつq) $\Rightarrow r$」

pかつqは $x=1$ かつ $x^2=1 \Leftrightarrow x=1$

$1>0$ だから (pかつq) $\Rightarrow r$ は真

B:「$q \Rightarrow r$」は偽. 反例は $x=-1$

C:「$\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$」とその対偶「$p \Rightarrow q$」は同値.

$p: x=1 \Rightarrow q: x^2=1$ は真だから, 元の命題「$\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$」も真.

以上から ② $\boxed{ス}$ (3)

[3]

$$g(x)=x^2-2(3a^2+5a)x+18a^4+30a^3+49a^2+16$$
$$=\{x-(3a^2+5a)\}^2-(3a^2+5a)^2+18a^4+30a^3+49a^2+16$$

$= \{x-(3a^2+5a)\}^2+9a^4+24a^2+16$

よって，頂点の座標は

$(\underset{\boxed{セ}}{3}a^2+\underset{\boxed{ソ}}{5}a,\ \underset{\boxed{タ}}{9}a^4+\underset{\boxed{チツ}}{24}a^2+\underset{\boxed{テト}}{16})$

(2)　　(2)

頂点のx座標は

$3a^2+5a=3\left(a+\frac{5}{6}\right)^2-3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2$

$=3\left(a+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{12}$

であるから，その最小値は $-\frac{25}{12}$ $\frac{\boxed{ナニ}}{\boxed{ヌネ}}$ (3)

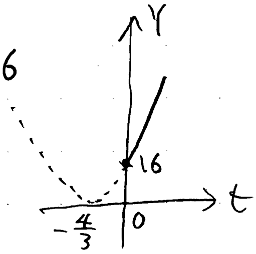
である．

$t=a^2$とおくと，頂点のy座標は

$9t^2+24t+16$

$=9\left(t+\frac{4}{3}\right)^2-9\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2+16$

$=9\left(t+\frac{4}{3}\right)^2$

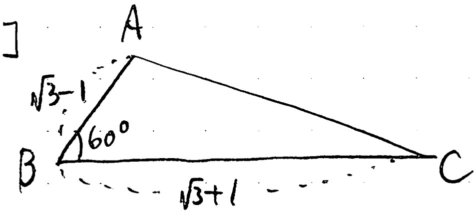


$t=a^2\geqq 0$ だから

y座標の最小値は $\underline{16}$ $\boxed{ノハ}$ (3)

第2問（配点30）

〔1〕



(1) 余弦定理により

$AC^2=(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2-2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)\cos 60^\circ$

$=(4-2\sqrt{3})+(4+2\sqrt{3})-2\cdot(3-1)\cdot\frac{1}{2}$

$=8-2=6$

$AC>0$ だから $AC=\sqrt{6}$ 　$\sqrt{\boxed{ア}}$ (3)

外接円の半径を R とすると，正弦定理から

$$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=2R$$

よって，

$$R=\frac{\sqrt{6}}{2\cdot\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{6}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{2}\quad \sqrt{\boxed{イ}}\ (3)$$

さらに正弦定理を用いて

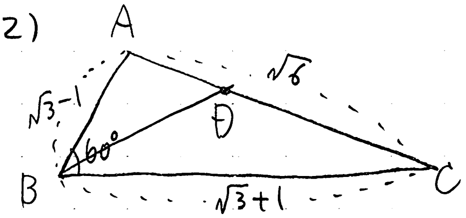
$$\frac{BC}{\sin\angle BAC}=2R$$

よって，$\sin\angle BAC=\dfrac{BC}{2R}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\quad \frac{\sqrt{\boxed{ウ}}+\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}\ (3)$$

$\left[=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\ \text{でもよい}\right]$

(2)



$\triangle ABD=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AD\cdot\sin\angle BAC$ より

$$AB\cdot AD=\frac{2\triangle ABD}{\sin\angle BAC}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{6}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

$$=\cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{6}}\cdot\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{4}{3(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{4(\sqrt{3}-1)}{3(3-1)}=\frac{4(\sqrt{3}-1)}{3\cdot 2}=\frac{2\sqrt{3}-2}{3}\quad \frac{\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}-\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\ (3)$$

であるから,

$$AD=\frac{2\sqrt{3}-2}{3}\cdot\frac{1}{AB}$$

$$=\frac{2(\cancel{\sqrt{3}-1})}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{3}-1}}$$

$$=\frac{2}{3}\quad\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\ (3)$$

[2]

⓪: XとYの相関関係がもっとも強い. (×)

①: 右上がりになっているので, XとYには正の相関関係がある. (○)

②: Vが最大のジャンプは $X=59$ で, Xは最大ではない. (×)

③: Vが最大のとき $Y\fallingdotseq 52$ で, Yは最大ではない. (×)

④: Yが最小のジャンプは, $X\fallingdotseq 56$ でXは最小ではない. (○)

⑤: Xが80以上のジャンプは, Vは92.8〜93.4である. (×)

⑥ Yが55以上のとき, Vは92.7〜93.9である. (○)

以上から, 正しいものは ①, ④, ⑥ $\boxed{シ}$, $\boxed{ス}$, $\boxed{セ}$ (6)

(2) $X=1.80\times(D-125.0)+60.0$

(2) これって数学Bの範囲じゃないの? 公式を知ってたら一発です.

n人がジャンプを行なったときの得点X, 得点Y, 飛行距離Dをそれぞれ, X_i, Y_i, D_i $(i=1,2,\cdots,n)$ とする. X_i, Y_i, D_i の平均をそれぞれ $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{D}$ とする.

$$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$$

$$=\frac{1}{n}\{(1.80\times(Ð_1-125.0)+60.0)$$

$$+(1.80\times(Ð_2-125.0)+60.0)$$

$$+\cdots$$

$$+(1.80\times(Ð_n-125.0)+60.0)\}$$

$$=\frac{1}{n}\{1.80(Ð_1+Ð_2+\cdots+Ð_n)-1.80\times125.0\times n+60.0\times n\}$$

$$=1.80\times\frac{Ð_1+Ð_2+\cdots+Ð_n}{n}-1.80\times125.0+60.0$$

$$=1.80(\overline{Ð}-125.0)+60.0$$

よって，Xの分散をv_Xとすると

$$v_X=\frac{1}{n}\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\cdots+(X_n-\overline{X})^2\}$$

ここで，

$$X_i-\overline{X}=1.80\times(Ð_i-125.0)+60.0-\{1.80\times(\overline{Ð}-125.0)+60.0\}$$

$$=1.80\times(Ð_i-\overline{Ð})$$

よって，$Ð$の分散を$v_Ð$とすると

$$v_X=\frac{1}{n}\{1.80^2(Ð_1-\overline{Ð})^2+1.80^2(Ð_2-\overline{Ð})^2+\cdots+1.80^2(Ð_n-\overline{Ð})^2\}$$

$$=1.80^2\times\frac{1}{n}\{(Ð_1-\overline{Ð})^2+(Ð_2-\overline{Ð})^2+\cdots+(Ð_n-\overline{Ð})^2\}$$

$$=\underline{3.24}\times v_Ð$$ ④ $\boxed{\text{ソ}}$ (2)

XとYの共分散をs_{XY}，$Ð$とYの共分散を$s_{ÐY}$とする

$$s_{XY}=\frac{1}{n}\{(X_1-\overline{X})(Y_1-\overline{Y})+(X_2-\overline{X})(Y_2-\overline{Y})+\cdots+(X_n-\overline{X})(Y_n-\overline{Y})\}$$

$$=\frac{1}{n}\{1.80(Ð_1-\overline{Ð})(Y_1-\overline{Y})+1.80(Ð_2-\overline{Ð})(Y_2-\overline{Y})+\cdots+1.80(Ð_n-\overline{Ð})(Y_n-\overline{Y})\}$$

$= 1.80 \times \dfrac{1}{n}\{(D_1-\overline{D})(Y_1-\overline{Y})+(D_2-\overline{D})(Y_2-\overline{Y})+\cdots+(D_n-\overline{D})(Y_n-\overline{Y})\}$

$= \underline{1.80} \times S_{DY}$ ③ $\boxed{タ}$ (2)

X, Y, D の標準偏差をそれぞれ S_X, S_Y, S_D とすると

$S_X = \sqrt{V_X} = \sqrt{1.80^2 \times V_D} = 1.80 S_D$

よって, X と Y の相関係数は

$$\frac{S_{XY}}{S_X S_Y} = \frac{1.80 \times S_{DY}}{1.80 S_D \cdot S_Y} = \frac{S_{DY}}{S_D \cdot S_Y}$$

よって, X と Y の相関係数は D と Y の相関係数と等しい. 従って, 1 倍, ② $\boxed{チ}$ ②

☆ X の平均, 分散をそれぞれ $E(X)$, $V(X)$ とすると

$E(aX+b) = aE(X)+b$, $V(aX+b) = a^2V(X)$

これを知っていると, 面倒な計算は一切不要.

(3) 1回目の X+Y の最小値は, A では 105 以上 110 未満, B では 100 以上 105 未満 だから.

1回目は A, 箱ひげ図 でも同様に考えて 1回目は a

よって, $\boxed{ツ}$ は ⓪ (1)

[四分位範囲 … 箱の右端 − 左端 です]

⓪: 1回目の四分位範囲は 129−116 = 13,
2回目の四分位範囲は 125−110 = 15
よって, ×

①: 1回目の中央値は 124, 2回目は 114.
よって ○

②: 1回目の最大値は143, 2回目は142.
よって ×

③: 1回目の最小値は108, 2回目は103
よって ×

$\boxed{テ}$は① (2)

第3問

(1) 事象E_1などの確率を$P(E_1)$と表す.

$P(E_1)=1-$(A, Bの両方がはずれくじを引く確率)

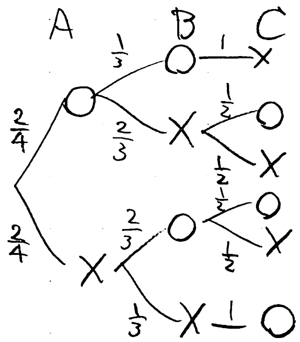
$=1-\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=1-\frac{1}{6}$

$=\frac{5}{6}$ $\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ (2)

※ 余事象を考えると時間を節約できます.

(2) もともとあたりくじは2本しかありませんので,
だれか1人が必ずはずれを引きますが…
ここでは樹形図が威力を発揮します.

あたりを○, はずれを×とすると,



2人あたりを引くのは

○○×
○×○
×○○

の場合なので, ①, ③, ⑤ $\boxed{ウ}$, $\boxed{エ}$, $\boxed{オ}$ (3)
が正解です.

和事象の確率は $\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot1\times3=\frac{1}{2}$ $\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ (2)

(3) $P_{E_1}(E)=\dfrac{P(E\cap E_1)}{P(E_1)}$ を求めればよい.

(1)より $P(E_1)=\dfrac{5}{6}$

$P(E\cap E_1)=$ (A, B, Cの3人で2本のあたりくじを引く確率)

$=\dfrac{1}{2}$ ($\because$ (2))

よって, $P_{E_1}(E)=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}}=\dfrac{3}{5}$ $\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$

(4) B, Cの少なくとも一方があたりくじを引くのは

○ ○ × Cだけがはずれ
○ × ○ Bだけがはずれ
× ○ ○
× ○ × Aがはずれを引く
× × ○

の場合だから, $\boxed{コ}$, $\boxed{サ}$, $\boxed{シ}$ は ⓪, ③, ⑤ (3)

その和事象の確率は 1−(B, Cがどちらもはずれを引く確率)だから

$1-\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{3}=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$ $\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$ (2)

※ A, B, Cの順で引くことになっていますが, B, C, Aの順で引いても確率は同じになります.

また, A, Cの少なくとも一方があたりのくじを引く確率は, 上と同じく, $\dfrac{5}{6}$ $\dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$ (2)

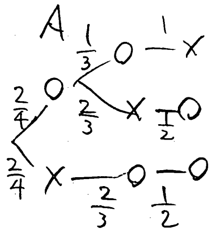
(5) $p_1=P_{E_1}(E)=\dfrac{3}{5}$

$$p_2=\frac{P(E\cap E_2)}{P(E_2)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}}=\frac{3}{5}$$

※事象E…A, B, C 3人であたりくじを2本引く。

なぜなら、

$E\cap E_2$は、「A, B, C 3人であたりくじを2本引き、B, Cは少なくとも一方があたりくじを引く」



だから

$$P(E\cap E_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

$$p_3=\frac{P(E\cap E_3)}{P(E_3)}$$

B, CをA, Cに変えたものだから、対等性により、$P(E_3)=P(E_2)$, $P(E\cap E_3)=P(E\cap E_2)$

$\therefore p_3=\frac{3}{5}$

従って、$p_1=p_2=p_3$. ⑥ $\boxed{チ}$ (4)

第4問 (配点 20)

(1) 下2桁が4で割り切れればよい。

$7a$が4の倍数なら 72, 76

であるから、$a=\underline{2}, \underline{6}$ $\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$ (各1)

(2) 4の倍数だから $5c=52, 56$

よって、$c=2, 6$

また、9の倍数だから、各位の数の和が9の倍数。

よって、$7+b+5+c=b+c+12=$(9の倍数)

$c=2$のとき $b+2+12=b+14=$(9の倍数)

$0 \leqq b \leqq 9$ より　$14 \leqq b+14 \leqq 23$

よって，$b+14=18 \Leftrightarrow b=4$

$c=6$ のとき　$b+6+12=b+18=$ (9の倍数)

$18 \leqq b+18 \leqq 27$

よって，$b+18=18, 27 \Leftrightarrow b=0, 9$

以上から，$7b5c$ は　7452，7056，7956

の $\underline{3}$ 個ある．　$\boxed{\text{ウ}}$ (2)

$7b5c$ が最小になるのは　7056 で，

$b=\underline{0}$，$c=\underline{6}$ のとき，　$\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ (2)

$7b5c$ が最大になるのは，7956 で

$b=\underline{9}$，$c=\underline{6}$ のときである．$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ (2)

$$36 \overline{)7452} = 207 \quad \begin{array}{r} 72 \\ \hline 252 \\ 252 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$36 \overline{)7056} = 196 \quad \begin{array}{r} 36 \\ \hline 345 \\ 324 \\ \hline 216 \end{array}$$

$$36 \overline{)7956} = 221 \quad \begin{array}{r} 72 \\ \hline 75 \\ 72 \\ \hline 36 \end{array}$$

平方数は $196=14^2$ のみ

よって．$7b5c$ は 7056 で，

$b=\underline{0}$，$c=\underline{6}$，$n=\underline{14}$

$\boxed{\text{ク}}$　$\boxed{\text{ケ}}$　$\boxed{\text{コサ}}$　(3)

(3)
$$\begin{array}{r|l} 2 & 1188 \\ 2 & 594 \\ 3 & 297 \\ 3 & 99 \\ 3 & 33 \\ & 11 \end{array}$$

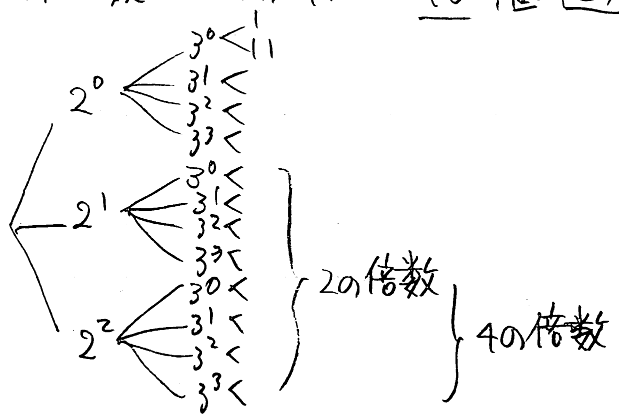
$1188=2^2 \cdot 3^3 \cdot 11$

約数は全部で

$(2+1)\cdot(3+1)\cdot(1+1)=3\cdot4\cdot2=\underline{24}$

個ある．　$\boxed{\text{シス}}$ (2)

2の倍数は $2\times4\times2=\underline{16}$ 個 $\boxed{\text{セソ}}$ (2)



4の倍数は $1\times4\times2=\underline{8}$ 個 $\boxed{\text{タ}}$ (2)

2進法で表して $1\underbrace{\square\square\square}_{0か1}\underbrace{00\cdots0}_{k個}$ のように

末尾に0がk個並んだとき, 10進法で表すと

$$1\cdot2^n+\square\cdot2^{n-1}+\cdots+2^k=2^k(\underbrace{\underbrace{2^{n-k}+\square\cdot2^{n-k-1}\cdots+\square\cdot2}_{2の倍数}+1}_{奇数})$$

よって, 10進法で表したとき, 素因数2の個数がkであることに他ならない。

1182のすべての正の約数の積に含まれる2の累乗は上の樹形図より

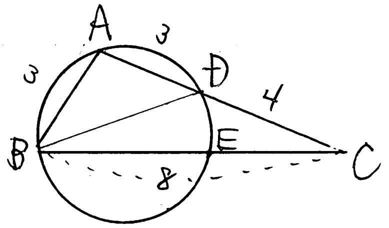
2^1が8個, 2^2が8個

よって, 2の個数は $8+2\times8=\underline{24}$ 個

従って, $\underline{24}$個の0が並ぶ。 $\boxed{\text{チツ}}$ (3)

第5問（配点20）

(1)



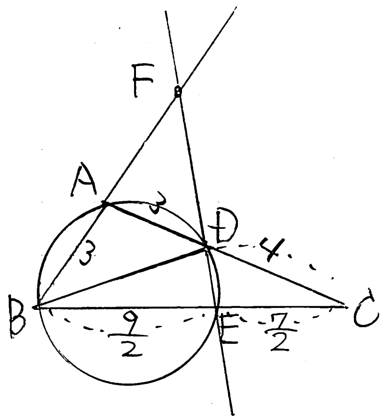
方べきの定理より

$CE \cdot CB = CD \cdot CA$

$\Leftrightarrow BC \cdot CE = 4 \cdot 7 = \underline{28}$ $\boxed{アイ}$ (3)

$\Leftrightarrow 8CE = 28$

$\Leftrightarrow CE = \frac{28}{8} = \underline{\frac{7}{2}}$ $\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ (3)



メネラウスの定理により

$$\frac{BF}{FA} \cdot \frac{AD}{DC} \cdot \frac{CE}{EB} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{BF}{FA} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\frac{7}{2}}{\frac{9}{2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{BF}{FA} \cdot \frac{\cancel{3}^{1}}{4} \cdot \frac{7}{\cancel{9}_{3}} = 1$$

$\Leftrightarrow \frac{BF}{AF} = 4 \cdot \frac{3}{7} = \underline{\frac{12}{7}}$ $\frac{\boxed{オカ}}{\boxed{キ}}$ (3)

$AF = y$ とすると，$BF = y + 3$

よって $\frac{y+3}{y} = \frac{12}{7} \Leftrightarrow 7(y+3) = 12y$

$\Leftrightarrow 5y = 21 \Leftrightarrow y = AF = \underline{\frac{21}{5}}$ $\frac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}$ (3)

(2) 余弦定理より

$$\cos\angle ABC=\frac{3^2+8^2-7^2}{2\cdot3\cdot8}$$

$$=\frac{9+64-49}{2\cdot3\cdot8}$$

$$=\frac{24}{2\cdot3\cdot8}=\frac{1}{2}$$

$0<\angle ABC<180^\circ$ だから

$\angle ABC=\underline{60^\circ}$ $\boxed{サシ}^\circ$ (2)

△ABCの内接円の半径をr, △ABCの面積をSとすると

$$S=\frac{1}{2}r(AB+BC+CA)$$

ここで,

$$S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC$$

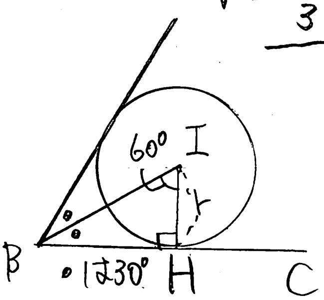
$$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot8\cdot\sin60^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$

よって, $6\sqrt{3}=\frac{1}{2}r(3+8+7)$

$$9r=6\sqrt{3}$$

$$r=\underline{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\quad\frac{\boxed{ス}\sqrt{\boxed{セ}}}{\boxed{ソ}}\quad(3)$$



IからBCに下した垂線の足をHとする。

$\angle IBH=30^\circ$, $\angle BHI=90^\circ$ より

$\angle BIH=60^\circ$ だから, $1:2:\sqrt{3}$

$$BI=2IH=2\cdot r=2\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}=\underline{\frac{4\sqrt{3}}{3}}\quad\frac{\boxed{タ}\sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツ}}\quad(3)$$

(以上)